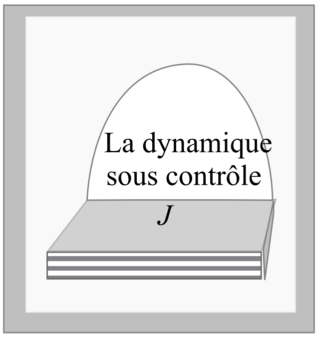


La dynamique sous contrôle

La dynamique sous contrôle... un cyber-rêve, le fantasme ultime du Manager, du Chef, du Leader, du Gouverneur, du Führer, du Grand Timonier, du Petit Père des Peuples (Staline, 7 ans séminariste), de William Gates, de Rastapopoupolos, bref de tous les vrais conducteurs et dominateurs de peuples qui, au lieu de dire comme un populeux Louis XIV : « L'état, c'est moi », ce qui est statique (comme son nom l'indique parfaitement) et figé, disent comme Ceaucescu en Roumanie « je suis votre devenir », ce qui l'a tué mort.

Ce qui est "cyber..." et "servo..." implique par ces mots-mêmes l'asservissement et l'amplification. Quoi de plus grandiose alors, de plus Chef, que les deux à la fois ? L'élégante simplicité de Gorotchenko, Commissaire du Peuple en Ukraine chargé en 1931 de la révolte des Moujiks, disant (dans « Tovarichtch » de J. DEVAL*) « Quatre murs pour punir, c'est trois de trop » est ici bien dépassée par l'amplification du Chef et l'asservissement du reste, via la dynamique sous contrôle, la plus belle conquête de l'homme et de ses machins et de ses jouets japonais.*

Needless to say, the classical control technology
has made marvelous accomplishments
in... military applications

J.T. TOU, Optimum Design of Digital Control Systems,
Mathematics in Science and Engineering,
Academic Press, 1963, page... 1 !

Pendant le voyage que vous avez failli faire au Mexique, son dernier empereur autochtone, surnommé "Copili" ("Couronne Royale") s'est fait murer très jeune en pyramide. Sur le mur est écrit le message du dieu Quetzocoatcl à Moctzézuma : « La plus grande erreur est de vouloir trop gouverner les hommes ».

Il n'y a en effet rien de plus beau que des instruments de pilotage. Stratégies, Tableaux de Bord, Cockpits, Management Control, KGB et tous les jouets du pouvoir de gouverner se vendent bien et cher. Mais piloter quoi ? La SABENA ?

La dynamique sous contrôle et sa modélisation

Sommaire

1 La dynamique sous contrôle

1.1 Le feed-back et ses implications restrictives

1.1.1 Prescription et contrôle

L'évolution des sociétés humaines vers les conditions de vie artificielles et collectives a mené le développement de sciences prescriptives ; ce sont celles qui conduisent à certains buts ou, très concrètement, au choix et assemblages de composantes réelles permettant d'accomplir certaines fonctions désirées. On ressent donc que ces voies ont transporté du pollen de systèmes. Les "lois" qui gouvernent les composantes de ces assemblages et les résultats de leur interaction sont comprises à l'aide des sciences descriptives, celles qui supportent la démarche d'analyse.

Les clés de distinction sont les suivantes :

- Le descriptif s'adresse à l'expression des caractéristiques dynamiques d'un processus ;
- On passe au prescriptif lorsque l'on veut prendre les choses en main sous l'égide d'un critère de performance ;
- La composition de l'assemblage est affaire de design (ce qui implique la synthèse) tandis que l'obtention de propriétés fonctionnelles associées à un ensemble en activité est affaire d'engineering. En principe il peut donc y avoir un "design" mais pas un "engineering" de quelque chose qui ne fait rien.

Alors que la physique, la théorie des systèmes et l'engineering ont des sources et domaines différents, elles ont cependant en commun le formalisme d'un objet abstrait (mathématique), qui pour chacune occupe une large part du discours ; il s'agit de l'expression de la dynamique par des équations différentielles (ou aux différences) et leur extension à une fonction de gouvernement donnant un input de contrôle impliquant une cible ou un type d'optimisation. On atteint alors les propriétés d'un vrai système, car la configuration inclut une forme de critère de performance, ce qui est une des principales propriétés qui distinguent le système d'un simple processus.

Trois préoccupations dans le domaine de l'engineering contaminent la problématique de la dynamique et du contrôle en gestion :

- L'association de l'engineering et du contrôle (aux fins évidentes de maîtriser et commander des processus) ;
- L'éclosion du traitement analogique-digital de données ;
- Explicite ou sous-jacente, une fonction d'évaluation, une expression de performance.

L'ensemble des trois donne le design des systèmes de contrôle, supportés formellement par la théorie (mathématique) des systèmes. Dès lors, l'optique de l'ingénierie du contrôle est celle de l'élaboration d'un tel système ainsi que du choix d'une injonction de contrôle, ou variable de commande, qui obtienne de la part de l'output du processus un comportement souhaitable. Un exemple en est la correction des écarts par rapport à une référence, laquelle peut être statique ou mobile et peut être décrite soit de façon numérique, soit par des propriétés. L'archétype d'une telle configuration en est bien sûr le système de contrôle à feed-back, déjà évoqué dans l'exposé sur «Les Modèles de processus».

La raison d'être du contrôle est la satisfaction d'une certaine consigne concernant le comportement ou l'output d'un processus. Dès lors, ce processus doit être affecté de telle sorte que la consigne soit satisfaite ou approchée au mieux. C'est cet "au mieux" qui est exprimé selon un critère de performance, dont les spécifications classiques, dans le domaine des ingénieurs, relèvent souvent d'expressions comme les suivantes.

- La marge de gain ;
- La marge de phase ;
- Le M-peak ;
- L'impédance de l'output ;
- Le rise time ;
- Le settling time ;
- Le peak overshoot ;
- L'integral-square error ;
- Le mean square error.

Pour obtenir si possible la référence imposée, un dispositif doit être situé devant le processus et lui envoyer un signal de commande qui affecte son comportement et qui reçoit l'information concernant celui-ci. Ceci conduit notamment au design à feed-back classique dont le schéma minimal est rappelé sur la Figure 1a aux fins de comparaison avec 1b. Ce design du contrôle à feed-back, dont la fortune est faite, peut cependant être critiqué, sans bien sûr remettre en cause sa prévalence justifiée.

1.1.2 Quelques commentaires sur le modèle du feed-back

a Artificiel

On doit le qualifier d'artificiel. C'est un "modèle de" qui se prête effectivement à une élégante formulation du vecteur de contrôle pour les systèmes exprimés en variables d'état, mais les systèmes ne "sont" pas comme cela. Ainsi, par exemple, on dessine (et exprime mathématiquement par la fonction de transfert) le lien de rétromettance, mais il n'y a pas de spécification de temps réel, ni de type de flux pour cette rétromettance : c'est un signal qui informe le comparateur de sorte que la régulation est elle-même un processus mathématique de convergence dont l'exécutif réel n'est pas spécifié.

b Pas unique

Ce n'est pas le seul modèle "de contrôle" ; plusieurs autres designs peuvent être élaborés pour rendre des services de commande de processus ou pour en obtenir des performances spécifiées.

c Configuration

Lorsqu'on utilise le concept classique de feed-back, la configuration est donnée a priori, et ce n'est peut-être pas la meilleure possible (elle peut même être inadéquate). Effectivement, il n'y a pas de "meilleur" ou "moins bon" modèle, mais le bon vieux feed-back nous ramène... en arrière, aux temps des classiques de la régulation et de ses extensions à l'homéostasie.

Ce n'est cependant que lorsque le critère de performance est d'atteindre un état, de s'y maintenir, ou de s'approcher au mieux d'une cible que le modèle du feed-back est un des plus adéquats.

d Gestion des inputs

D'autres versions de la commande et de la performance existent, par exemple le fait d'utiliser au mieux les inputs (disons au coût minimal), ce qui devient un problème d'optimisation sous contrainte, et est dès lors plutôt pris en charge par la programmation mathématique.

e Problèmes d'invariance

Comme le modèle du contrôle classique par feed-back se heurte à des limites sévères lorsqu'il est porté aux modèles multivariés et variants, il ne s'applique qu'à des problématiques de contrôle soit idéalisées soit réelles mais dans ce cas très simplifiées.

f Comparaisons limitées

Dans ce modèle de feed-back, seuls l'input et l'output sont soumis au "comparateur", celui-ci délivrant en conséquence le signal de contrôle ; lorsque le système dépasse un tel niveau de complexité, cette relation peut ne fournir qu'une information insuffisante pour effectuer un contrôle optimal, sinon vraiment efficace. Ce point donne déjà envie de le transposer dans le domaine de la gestion, à savoir que, dans le cas des EAH, on utilise un "contrôle" particulièrement hâtif et peu adéquat seulement fondé sur la vision des résultats finaux (outputs et rentabilité de l'exploitation, respect de budgets) et la comparaison avec ce que les Chefs demandent qu'ils fussent, qui servent de valeurs de référence.

g Pas de contrôle du processus

L'absent est alors le contrôle de la manière, du processus. Par exemple comment tel professeur enseigne (ou telle matière est enseignée), et pas le pourcentage d'échec ou les moyennes des cotes ; ou encore, comment les patients sont traités et soignés dans tel département ou établissement hospitalier, et pas seulement combien, selon quelle pathologie, issues, ou produisant quel chiffre d'affaires. On peut avancer sobrement et sans emphase que cette paresse, cette négligence, cette incompétence, cet obscurantisme et cette étroitesse d'esprit ont conduit maints EAH à la pauvreté, la misère, le mépris (puisqu'ils sont pauvres), la maladie, la mort. Il est vrai aussi que le contrôle dans le domaine de la gestion n'a rien, mais alors vraiment rien, d'optimal et c'est déjà beaucoup quand un moins que rien de ce genre est mis en place.

Un autre aspect du contrôle des EAH trop restreint, borné par ses pratiquants, mais rendant d'autre part un service utile, est fondé sur la notion très restrictive de "management control" issue des administrations américaines, surtout fiscales puisque cet aspect est exclusivement affaire de budgets, écritures et procédures. La fascination que celui-ci a exercée a eu aussi un rôle obscurantiste, taxant d'hérésie les écarts à cette doctrine, de sorte que les autres aspects du contrôle, qui pourtant peuvent être jeunes, riches, beaux et intelligents, et présentés dans ces exposés, ont été largement dominés par cette approche.

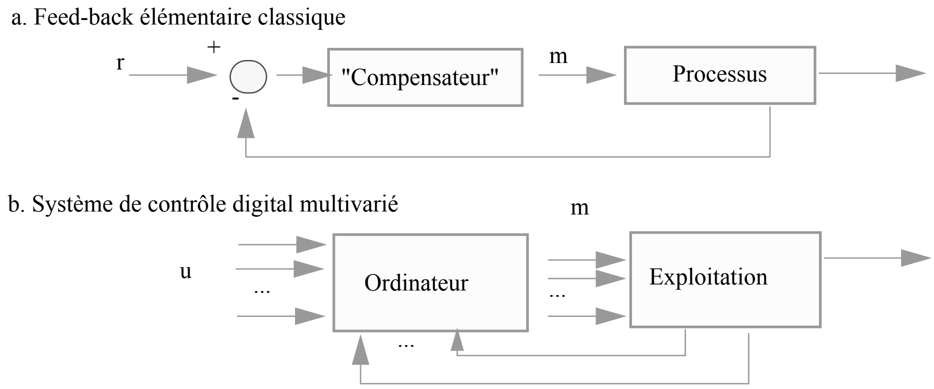
L'entreprise ne paie pas vos efforts; seulement vos résultats.

1.2 L’approche dite "moderne"

L’approche dite moderne – parce qu’il y en a une encore plus ancienne – a pour principe de déterminer un foncteur ou une politique optimale de contrôle qui réponde à un ensemble de critères de performances. Les filtres analytiques ("de Kalman" et autres) et certains modèles de réseaux peuvent rendre service pour les cas simples, mais quand c’est complexe on confie le rôle de "contrôleur" à un programme d’ordinateur, en oubliant toujours qu’il a fallu que quelqu’un le programme.

Cette approche moderne donc, a des anciens pratiquants qui n’ont plus donné signe de mort depuis longtemps. Elle est fondée sur une extension du formalisme des équations d’état comme dans l’exposé sur « La Dynamique sous influence », permet de traiter des inputs multiples, obtenir de bonnes, ou les meilleures, configurations et peut prendre en charge toute condition initiale donnée. À cette fin, l’ordinateur doit recevoir toutes les informations décrivant la dynamique du processus (ou de l’"exploitation") pour effectuer la recherche de la meilleure politique de contrôle. La Figure 1.b, très schématique, illustre ce propos par comparaison avec le feed-back 1.a.

Figure 1. Deux esquisses de systèmes de contrôle



Les premiers modèles systémiques de contrôle visent donc une cible de référence, soit immobile (en régulation élémentaire), soit variante, ce qui demande alors une fonction de gouvernement, et le modèle du feed-back en est une réponse illustre et pertinente. Une autre gamme de formulations est celle de l’obtention et du maintien d’une trajectoire. Là il faut faire appel à des opérateurs associés au processus de commande, ce qui est un problème analytique, offrant aux premières loges les versions lagrangiennes et le hamiltonien.

Le processus peut y être affecté d’un input extérieur aléatoire, appelé souvent perturbation (ou même facteur de corruption) et le processus de commande devra avoir la variété nécessaire pour le prendre en charge mais en général il ne pourra accepter que des perturbations extrêmement simples analytiquement pour ne pas être débordé. La problématique devient de contrôle optimal lorsque le processus est associé d’une fonction de performance impliquant les variables d’état et de commande.

Plus spécifiquement, un problème analytique de contrôle optimal se définit par :

- Une fenêtre temporelle définie par un moment initial (de label 0) et un moment terminal (de label h pour "horizon") ;
- Les équations de transformation d'un vecteur d'état x(t), qui expriment le processus de la dynamique ;
- Un ensemble de conditions imposées aux variables d'état au temps initial 0 et au temps terminal h (ce qui veut dire un état terminal, ou un intervalle, imposé comme cible) ;
- Un ensemble de contraintes affectant les variables d'état et les variables de contrôle.

La mission du contrôle est alors de :

Déterminer un vecteur de contrôle m(t) admissible de telle sorte qu'un indice de performance J sur x, m soit maximisé ou qu'une fonction de pénalité J sur x, m soit minimisée.

Cette formulation est donnée aux sections 2 à 4. La section 5 en présente une analogie officieuse comme "système de contrôle" en gestion et, en 6, l'exposé concerne des problèmes de mises en oeuvre de ces aspects de dynamique et de contrôle.

2 Formulation de systèmes symboliques de contrôle

2.1 Dynamique d'état et fonction de performance

La dynamique du contrôle est une matière très élégante, même aristocratique. S'occuper de modèles mathématiques de contrôle, çà clâsse, cela vous cybernétise socialement, vous met à l'abri de regards indiscrets derrière les clôtures de votre cerveau, écarte les violeurs du site protégé de vos connaissances, éconduit les manants des sciences molles venant fouler les territoires de vos chasses à l'ignorance, et pour le faire...

Et pour le faire, rien ne vaut les conseils d'ÉRASME :

> « Ainsi nous imiterions ces rhéteurs de nos jours, qui se croient des dieux pour user d'une double langue... ils arrachent à des parchemins pourris quatre ou cinq vieilles formules qui jettent la poudre aux yeux du lecteur, de façon que ceux qui les comprennent se rengorgent, et ceux qui ne les comprennent pas les admirent d'autant mieux... ils rient, ils applaudissent, remuent les oreilles comme les ânes, pour montrer qu'ils ont bien saisi »

ÉRASME, Éloge de la Folie (trad.), Flammarion, 1964, p.19.

La formulation symbolique du contrôle le définit comme suit :

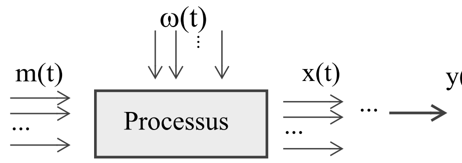
- Il est confié à une seule ou à plusieurs variables de commande désignées par le vecteur $[m_1(t), m_2(t),\dots, m_p(t)]$; elles sont écrites comme des fonctions temporelles continues ou discrètes ;
- Ce vecteur de variables m(t) est appliqué à un processus pour donner à celui-ci un comportement plus conforme à la référence, laquelle sera désignée par r(t) ;
- Ce comportement est observé dans ce schéma élémentaire par les frasques d'une variable continue, disons y(t).

L'objet du système de contrôle est dès lors :

- Trouver une forme fonctionnelle du signal de contrôle $e_1(t)$, à savoir la relation entre la valeur (ou la fonction) de référence r(t) et la valeur observée de y(t) ;
- Déterminer le vecteur de variables de commande m(t) qui maîtrise le comportement dans le temps de y(t).

La formulation d'un problème de contrôle optimal demande que les caractéristiques dynamiques du processus soient connues, puis explicitées. Ici, la dynamique de l'exploitation sous contrôle sera décrite par un processus accueillant les inputs de commande (le vecteur m(t)) et les perturbations (les ω(t)). Un extrait en est présenté à la Figure 2.

Figure 2. Un processus affecté d'inputs de commande et de perturbations



Dès lors, selon la configuration dominante dans le domaine symbolique (son expression mathématique), la dynamique du processus est décrite par un vecteur f de fonctions de transformation f_i (i=1,...n), et le vecteur d'état x(t). Ce vecteur de fonctions (qui deviendra plus loin un opérateur F) a pour arguments les variables d'état, les inputs de commande et les perturbations, comme il est écrit en petit ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} \partial x_1 \\ \dots \\ \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1[x_1(t), \dots, x_n(t); m_1(t), \dots, m_r(t); w_1(t), \dots, w_s(t); t] \\ \dots \\ f_n[x_1(t), \dots, x_n(t); m_1(t), \dots, m_r(t); w_1(t), \dots, w_s(t); t] \end{bmatrix}$$

Les p variables de commande ne peuvent être libres ; opérationnellement, elles sont tenues à satisfaire conjointement un ensemble de p inégalités :

$$g_j(m_1, m_2, \dots, m_p) \leq 0$$

Les valeurs de commande elles-mêmes peuvent devoir être bornées selon des conditions de faisabilité, par exemple en raison d'effets de saturation, ou simplement en raison de limites physiques :

$$|m_j| \leq M_j$$

Plusieurs expressions analytiques de critères de performances peuvent être utilisées, pourvu qu'elles soient une fonction scalaire. Sinon c'est une problématique à plusieurs fonctions de performances ("multicritère"), ce qui est un fleuron de la recherche opérationnelle, mais est inabordable dans le cadre général analytique du contrôle dynamique.

Soit "I" l'indice de performance de la forme analytique générale. Utilisant la présentation matricielle, la formulation du système de contrôle s'écrit :

$$(1)\quad \begin{cases} \partial x(t) = f[x(t), m(t), t] \\ I[x(t_0), m] = V[x(t_h), t_h] + \int_{t_0}^{t_h} \boldsymbol{U}[x(t), m(t), t]dt \\ g(m) \leq 0 \\ \|m\| \leq M \end{cases}$$

On lit sur (1) qu'une telle fonction de performance implique :

- Une Valeur de l'état à l'horizon h, qui est symbolisée par la composante $V[x(t_h)]$,
- Une Performance de la trajectoire du temps initial 0 à l'horizon terminal h, laquelle est symbolisée par la fonction d'Utilité ***U***[ ] de la trajectoire des états et du vecteur de contrôle m(t), soit l'expression ***U***[x(t), m(t), t].

  Celles-ci sont sommées, intégrées (quand on l'écrit en mathématique) pendant la période allant de l'état initial $x(t_0)$ à un état "terminal" (mathématiquement x à l'horizon "h"), pour former cette "utilité" ***U***(.) cumulée (par l'intégrateur) de ce parcours.
- Il peut aussi y avoir "désutilité" du vecteur d'état et de contrôle ou de certaines de ses composantes, c'est-à-dire des "U_j" peu performants ou négatifs.

Pour illustrer ce propos, voici des transpositions, un peu forcées peut-être, de cette formulation symbolique vers des problèmes réels :

- Dans le domaine médical, on voudrait "optimiser" le "***V***$[x(t_h)]$ d'un patient, c'est-à-dire le résultat en termes de statut médical final (donc à l'horizon h) – ce qui veut dire qu'on veut qu'il aille le mieux possible ! A cette fin, ce patient aurait à subir des charges médico-techniques et thérapeutiques lourdes, et aurait des "états" x(t) transitoires pénibles à supporter au cours de ce processus de soin. Ce sont bien sûr des désutilités, formulées par l'expression ***U***[x(t), m(t), t], ci-dessus, et qu'il faudrait minimiser.
- Soit le cas réaliste du contrôle aérien. La trajectoire optimale d'un avion en zone terminale (décollage et approche) selon des critères d'économie de fuel, de temps d'atteinte d'altitude, de sécurité, de vitesse et de pente est bien paramétrisée et connue. Cependant, le contrôle permettant de l'obtenir implique un sérieux inconfort des passagers, et un compromis raisonnable impliquant la désutilité est accepté.
- En économie, des processus industriels peuvent avoir des outputs indésirables, des externalités comme la pollution, et donc, par définition, une "désutilité". En ville aussi, faire des parkings, c'est bien, mais en abattant des arbres, c'est bête et méchant.
- De même, en cours de guerre, utiliser des défoliants des végétaux pour mieux repérer une population avant de l'exterminer sous les bombes peut avoir des effets défavorables sur l'esthétique du paysage environnant.

La fonction vectorielle "***U***" peut donc représenter des utilités ou des désutilités de la trajectoire (celle des états $x_{(t)}$) et de son vecteur m de contrôle. Le vecteur de fonctions de valeur ***V***, par contre, donne une évaluation de l'état atteint en phase terminale, à l'horizon h. On s'attend à ce qu'un tel indicateur soit maximisé, ce qui exprime la recherche de l'état final le plus désirable.

Cette dualité de la performance qualifiée de "trajectoire-terminale" est associée à ce qu'on appellera, dans l'exposé dédicacé à cette fin, d'une part la téléonomie "de processus" et d'autre part la téléonomie "d'état" (final) ; le mot "téléonomie" y sera expliqué en termes de désirable et non-désirable.

L'utilisation d'un vecteur d'état, et celle d'une description matricielle du processus, imposent que l'espace des états soit un espace vectoriel de dimension finie, et spécifiquement euclidien puisqu'il va falloir procéder à des produits scalaires. Ici encore, la transposition du problème dans l'espace des états offre un traitement largement unifié, y compris celui des cas non-linéaires, dont on doit la partie pionnière à feu Richard BELLMAN.

Le vecteur d'état est analogue aux coordonnées généralisées en mécanique classique. Un point x dans cet espace, appelé point représentatif, est de n coordonnées ($x_1,\ldots, x_n$) pour un système d'ordre n, ce qui est la source de la définition généralisée suivante :

> Le lieu géométrique des points représentatifs dans un intervalle de temps est la trajectoire dans cet intervalle ; celle-ci décrit le mouvement.

2.2 La forme linéaire de l'équation d'état

Une classe particulière de l'équation d'état est la forme linéaire associée de perturbations additives, présentée en (2). Le modèle est non-stationnaire et n'est pas invariant. Les foncteurs, en effet, sont bien écrits $\boldsymbol{F}$(t) et donc sont eux-mêmes variants dans le temps. Il va de soi qu'une telle propriété, qui ouvre beaucoup de possibilités réalistes car ce qui gère la dynamique est flexible, se paye aussi très cher en possibilités de maîtriser les trajectoires puisque les générateurs mêmes de trajectoires peuvent changer.

Mathématiquement, c'est difficile parce que la définition des variables d'états, qui sont des vecteurs de dérivées, demande du doigté et une incursion profonde dans des domaines interdits aux mineurs d'âge intellectuel. Ils sont cependant moins interdits en pratique, en raison des curieuses capacités de la psychomotricité humaine.

Ainsi, lorsque pour combler leurs lagunes les petits bourgeois jouent les Surcouf dans le canal Albert sur leur petit yacht du dimanche, une simple variation d'orientation de la voile (à vent constant) a cette propriété d'être un foncteur variant de la dynamique. Mais, selon ce modèle à paramètres non-constants, il faudrait diriger le bateau avec un gouvernail à effet variable ! Or, sur un dériveur il l'est effectivement, car cet effet du gouvernail dépend de la vitesse (et aussi de la densité de l'eau, mais que la rigueur est excédente !).

Le navigateur, même néophyte, s'y fait pourtant facilement. Pour s'entraîner, il suffit de regarder Belle-Maman, se fondant sur son permis de conduire, lorsqu'elle se fait fort de rentrer la bagnole avec sa remorque dans le garage au fond de la cour en marche arrière et en tournant : le modèle de cette trajectoire y est analogue.

Le problème de système de contrôle, en mathématique et en engineering, n'est cependant pas de le faire soi-même, mais est de faire un pilote automatique qui sache le faire (comme les pilotes automatiques de bateau de course), en faire le design, le mettre en oeuvre, le faire fonctionner et couler et se noyer s'il ne marche pas. Car, une fois de plus, un système est censé faire quelque chose de façon quasi autonome et ce, à la place d'un agent.

C'est là que la vraie systémique se découvre. Les rêveries et poésies ne pilotent qu'un vieux chaland, le «Bateau-Ivre» d'ARTHUR RIMBAUD, qui a largué ses amarres, a dérivé sur le fleuve, s'est bien promené, a divagué en suivant ses mirages, a atteint la mer, s'est égaré au grand large et, marin d'eau douce et d'écluses saisi par la violence des éléments, a coulé corps et biens, ne laissant en surface comme bouteille à la mer que le plus beau poème qui ait été écrit dans la langue de Van Peperbol. Bateaux-ivres sans gouvernail, sans Timonier, sans Kybernetes et sans Windows, que d'admiration méritent alors ceux qui pilotent des entreprises, des EAH, ou même des pays entiers (ou en morceaux)?

Or donc, voici enfin cette expression (2) tant espérée, en version linéaire. Le foncteur F qui y figure deviendra un opérateur matriciel A dans quelques instants.

(2) $\partial x(t) = F(t)x(t) + G(t)m(t) + w(t)$

Même les présentateurs télé savent que la solution de (2) en termes de trajectoire est:

$$x(t) = e^{F(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{F(t-\tau)}[G(t)m(\tau) + w(\tau)]d\tau$$

La version discrète est surtout d'actualité pour le contrôle digital, car la succession temporelle y est celle des instants t_k d'échantillonnage du signal (ce qui a été introduit dans l'exposé sur «La Dynamique sous influence»).

Une expression discrète de la fonction de performance (1) peut s'écrire:

(3) $$I\left[x_{t_0}, m\right] = \boldsymbol{V}\left[x_{t_h}, t_h\right] + E\sum_{k=1}^{\infty} U\left[x_{t_k} - r_{t_k}, m_{t_k}, \omega_k, t_k\right]$$

Dans cette expression (3),

- ***E*** est l'opérateur d'espérance mathématique (s'appliquant à la perturbation ω qui est aléatoire);
- ***V*** est la fonction de Valorisation de l'état final (donc à l'horizon h);
- ***U*** est la fonction de performance (en "Utilité") des états discrets. Celle-ci est exprimée en écarts par rapport à la valeur de référence $r(t_k)$ spécifiée comme consigne au repère temporel t_k.

Pour l'homme du trottoir (les rues sont mal fréquentées), une transposition de (3) dans une réalité serait comme un rallye: il y a une gratification (V) au terminus (ici l'horizon h) et des gratifications en fonction ***U*** des écarts (x_k-r_k) à des repères r_k situés sur le trajet.

Mais comment une jeune fille d'aussi bonne famille peut-elle poser devant tout le monde des questions aussi indiscrètes que la suivante: peut-on résoudre les problèmes, discrets et continus, qui ont la formulation décrite ci-dessus (où "résoudre" signifie "obtenir par contrôle la meilleure performance")? La réponse est "oui facilement" quand le modèle est linéaire, mais "beaucoup plus difficilement" quand il est non-linéaire. Les approches classiques jouées devant des publics nombreux du contrôle optimal sont le calcul des variations, et le principe du maximum de PONTRYAGIN. Plus jeune et plus fraîche, est apparue en 1958 la programmation dynamique, la recherche opérationnelle ayant en effet pour beaucoup de formulations pris le relais de la traditionnelle théorie formelle des systèmes.

Pour qu'on veuille bien croire que ce modèle est soluble, on va le tremper un instant dans un liquide lagrangien, puis on va l'étendre et le mettre à sécher sous un régulateur.

On peut aussi l'enfiler tout mouillé, et aller directement à la section 6, ce qui est recommandé, car l'essentiel y est "concrétisé" dans un modèle de servo-système appliqué à la gestion de production (dû à H. SIMON), ainsi que dans certaines autres publications en la matière.

2.3 La version lagrangienne d'optimisation sous contrainte

Soit que la fonction de performance s'écrive $I = \phi[x,m]$ et que les contraintes sur les variables de contrôle soient exprimées par des égalités. Dans ce cas, l'optimisation est de nature lagrangienne, à savoir que l'on peut former une quantité scalaire H, fonction des états x, de la commande m et du vecteur λ des n multiplicateurs de Lagrange, tels que :

$$\boldsymbol{H}(x,m,\lambda) = \phi(x,m) + \lambda\Pi(x,m)$$

Cette quantité est le hamiltonien, aux propriétés fascinantes, dont les extrema peuvent être mis en évidence, selon les bonnes habitudes, par les conditions du premier ordre par rapport aux arguments vectoriels x et m ainsi que λ. Ces conditions formeront les systèmes matriciels à résoudre et on vérifiera ensuite les conditions de second ordre. On peut montrer une telle solution dans une formulation simple de ce problème, en décrivant le processus comme suit, et en utilisant :

- Des opérateurs invariants $F[n{*}n]$, $G[n{*}m]$;
- Les vecteurs x, m et $c[n{*}1]$;
- Des matrices symétriques positives définies $Q[n{*}n]$ et $R[n{*}m]$.

Le processus est :

$$\boldsymbol{f}(x,m) = Fx + Gm + c = 0$$

Dans les cas praticables, F et G sont simplement des matrices courantes comme :

$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} m_k - \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

On y voit bien les matrices F et G, avec ici m scalaire. Q et R peuvent être lues également comme de simples matrices opérationnelles, qui par exemple ne servent qu'à exprimer une fonction de performance, disons quadratique comme celle qui suit :

$$\boldsymbol{I}(x, m) = \frac{1}{2}\|x\|^2 Q + \frac{1}{2}\|m\|^2 R$$

Quel vecteur de commande minimiserait une telle fonction de performance ? La fonction hamiltonienne s'écrit :

$$H = \frac{1}{2}m'Rm + \frac{1}{2}x'Qx + \lambda'[Fx + Gm + c]$$

Les conditions de premier ordre sont simplement :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = Qx + F'\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial H}{\partial m} = Rm + G'\lambda = 0$$

De sorte que le vecteur optimal de commande m^o, lorsque λ est calibré pour satisfaire la contrainte, est :

$$m^o = -\left[R + G'F'^{-1}QF^{-1}G\right]^{-1} G'F'^{-1}QF^{-1}c$$

C'est donc très simple, efficace et facile d'emploi (lire la notice et éviter tout contact avec le cerveau), puisque le modèle présenté est de structure minimale. Mais il faut quand même que la matrice de transition d'état F soit non-singulière ; cette condition sera liée aux propriétés mathématiques de l'observabilité et de la contrôlabilité.

2.4 La version lagrangienne discrète de l'optimisation sous contrainte

Dans la version discrète, les dérivations sont remplacées par un pas temporel d'une unité. Bien que cette correspondance ne soit pas très claire en mathématique, elle est exploitée très efficacement en programmation de modèles dynamiques en gestion, et la voilà :

$$x_{k+1} = A\, x_k + Gm_k$$

$$J = \Sigma\, [½\, x'Qx + ½\, m'Rm]$$

$$H = J + \lambda'_{k+1}\, [A\, x_k + Gm_k - x_{k+1}]$$

C'est bien le "modèle" qui gère la dynamique des états x qui est à satisfaire, c'est-à-dire que sa formulation devient la contrainte dans le lagrangien augmenté qui exprime la performance. La suite serait bien sûr formée par les conditions d'ordre à résoudre pour l'obtention d'un extremum. Cette suite est rarement écrite, comme dans des oeuvres célèbres, et forcément pour la Symphonie Inachevée de SCHUBERT. Ainsi on connaît l'Ancien Testament et le Nouveau, mais pas le Prochain, qui pourrait se rédiger au gré d'une nouvelle rencontre d'un Troisième Type. De même, pensant à l'ami Victor ou à Oscar, on connaît souvent son ancienne femme, et aussi sa nouvelle, mais rarement sa prochaine. Car les testaments sont comme elles et comme Windows : c'est la prochaine version qui sera la bonne.

3 Formulation d'un régulateur linéaire

3.1 La tête du client

Comme on dit tant de bien du paradigme de la régulation, il serait bon de savoir ce qu'il a dans le ventre, en commençant par inciser le plus simple, le régulateur linéaire continu sans contrainte et dont les états sont directement observables. L'extension se fera vers le servomécanisme (une cible à traquer), les contraintes et le système discret généralisé.

Le client habituel a maintenant la tête suivante :

$$\partial x(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + \omega(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

La composante stochastique $\omega(t)$ sera cependant laissée en réserve pour ne pas encombrer les écritures et pour ne pas se laisser furtivement décanter par les filtres de WIENER. Les modèles élémentaires traitent de toute façon les composantes stochastiques par le principe d'équivalence de certitude, en ce sens que les mêmes valeurs de l'argument optimisent la fonction de performance lorsque l'on utilise l'espérance mathématique de la fonction de densité que si l'on utilise toute l'information contenue dans la distribution de probabilité. C'est le cas notamment pour les systèmes linéaires auxquels on associe une fonction de performance quadratique.

3.2 Expressions de la fonction de performance du contrôle

3.2.1 La forme quadratique standard

Soit une fonction de pénalité J, ici quadratique par les matrices Q et R (dites "de pondération"), adressée à l'horizon t_h:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}'(t_h)\mathbf{S}\mathbf{x}(t_h) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_h}[\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{m}'(t)\mathbf{R}\mathbf{m}(t)]dt$$

Les voies de solutions sont d'efficacité inégale selon la fonction de performance, ou selon le problème posé. L'ancienne voie est celle du calcul des variations (aller de t_0 à l'horizon t_h de façon optimale, par exemple par la trajectoire minimale et sans renverser la brouette). Celle-ci repose sur les recettes ancestrales d'extréma liés, à savoir les équations d'Euler-Lagrange et les conditions de premier et second ordre. Quelques formes différentes en sont adaptées. Ainsi, lorsque la fonction de performance U est continue par rapport à x(t), m(t) et t, elle peut s'exprimer comme suit par une formulation Lagrangienne :

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{m}, t] = \int_{t_0}^{t_h}\boldsymbol{U}[\mathbf{x}(t), \mathbf{m}(t), t]dt$$

Les cercles d'initiés se plaisent (à eux-mêmes) à parler des versions ésotériques du contrôle optimal, un peu comme au golf on cause du meilleur numéro de fer qui vous sortira du bunker devant le trou n°4. Se vautrant dans la vulgarisation, on se permet de n'en donner ici que les versions les plus populacières.

3.2.2 Le problème de Bolza

Dans les salons spécialisés, on se met en valeur en disant que l'on a fait face à un problème dit "de Bolza" et qu'on en a déjoué les pièges. Ce sera le cas si l'expression de ***U***[.] ci-dessus comprend la différentielle ∂x dans la fonction de performance. Il est d'ailleurs fascinant de trouver la variation d'état dans l'indice de performance lui-même et pas seulement l'état atteint ou sa trajectoire.

On retrouvera dans l’exemple de Herbert SIMON (annoncé pour la section 6) une telle version de la performance, qui implique de pénaliser les variations de la production (et/ou des stocks) via l’argument qu’un régime plus stable est de moindre coût.

3.2.3 Le problème de Mayer

Un peu moins prisé, mais simple et élégant, est le problème de contrôle dit "de Mayer" qui prévaut lorsque l’indice de performance (sous la version de la pénalité J à minimiser) est construit uniquement sur les valeurs finales, à l’horizon h :

$$J_M = V[x(t_h), t_h]$$

Ici V désigne la fonction de Valeur sur les états à la période "h" (et non pas un opérateur).

3.2.4 Temps minimal et efficacité

Le problème de Mayer peut prendre différentes formes. Si l’expression générale du V[.] de Mayer est en termes de "$[t_h - t_0]$", c’est-à-dire de différence entre un temps final et un temps initial, alors minimiser J_M définit un problème de temps minimal.

Celui-ci pourrait avoir son répondant, mais sous d’autres cieux, dans certains contextes de gestion comme, par exemple, le temps d’élimination d’une nappe de pollution, l’évacuation d’une population lors d’une catastrophe, la remontée d’un sous-marin, l’écoute des revendications du personnel.

3.2.5 Économie d’inputs de commande et efficience

Si la formulation de la fonction de performance implique de minimiser une fonction monotone de m, par exemple sa norme $\|m\|$, cela veut dire que l’on recherche la cible en minimisant les inputs de commande, donc s’efforce d’y mettre le moins possible de ressources de commande, c’est-à-dire enfin que le critère est l’énergie minimale de contrôle.

Ce critère exprime la paresse en minimisant discrètement les valeurs de la commande m :

$$J_n = \sum_{k=0}^{n-1} m^2(k)$$

Plus officiellement, si le vecteur de commande est m(t),

$$J_n = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_h} m'(t)m(t)dt$$

On retrouve donc de façon opérationnelle des idées comme celle de la téléonomie de processus, l’efficacité (capacité d’atteinte d’une cible, quelles que soient les ressources) ou d’efficience, c’est-à-dire la performance qui établit une relation entre le résultat atteint et des ressources utilisées à cette fin. La généralisation de ces critères est présentée dans l’exposé sur « L’Évaluation ».

3.2.6 Temps minimal de contrôle

Un cas particulier de critère de performance est dit de "temps minimal de contrôle" ; il doit s'écrire formellement :

$$J_h = \int_{t_0}^{t_h} (1) dt = t_h - t_0$$

Ce critère revient à minimiser le temps d'obtention des valeurs de référence.

Ceci inspire, par analogie, un critère de performance de régulateurs en gestion, qui est de passer le moins de temps possible avec le vecteur de commande m(t). Ce critère est d'autant plus largement utilisé en gestion qu'il s'agit de Chefs hauts de forme. En effet, on le retrouve le plus souvent comme critère de pénalité des réunions élevées en grade comme les Conseils d'Administration, où c'est manifestement la vitesse d'expédition des affaires (dites, à juste titre, "courantes") qui prime sur toute autre considération (y compris bien sûr la qualité des décisions). On est alors gratifié du "cela n'a pas traîné aujourd'hui" ou bien du "15 cas en deux heures ; pas mal parce que plusieurs étaient graves", qui sont au Conseil de Gestion ce qu'est le petit rot de satisfaction après le repas.

Dans une telle Société, il ne faut cependant pas avoir l'air pressé : cela veut dire qu'il vous attend quelque chose de plus important que vous ; il faut avoir l'air ennuyé, car cela veut dire que vous attendez que se termine quelque chose qui est moins important que vous. Quand au paramètre de temps terminal, c'est plus facile : il est établi comme fonction de l'heure du déjeuner ou du golf. La loi appliquée est "au plus bref au plus Chef", qui sera le guide implacable du "Tableau de Bord" achevant, après quelques soins palliatifs, l'exposé sur «Les Synthèses d'information».

Un problème de contrôle optimal de tels systèmes se traite de façon classique par le calcul des variations, via l'habituelle équation de Euler-Lagrange. On écrit ici "habituelle" par familiarité mais il y a, paraît-il, selon des confessions entendues, des ménages qui ne le font pas souvent.

3.2.7 Le relais politique

L'équation de J_h doit être soumise à des conditions de bornes qui concernent l'état initial et l'état final, c'est-à-dire le fameux "two points boundary problem", qui est difficile à résoudre analytiquement de cette façon, mais qu'on retrouve explicitement en recherche opérationnelle, où des algorithmes adaptés ont pris le relais des solutions analytiques. Pour ce type de problème, un progrès important (le "Principe du Maximum") a été fait en Russie depuis 1956 par une équipe dirigée par PONTRYAGIN dans le cas de systèmes continus et ensuite par R. BELLMAN aux USA pour des systèmes discrets.

Il est d'ailleurs symptomatique que les chercheurs des pays communistes (européens) fussent très orientés vers les systèmes continus, alors que l'étude et le traitement en mathématiques discrètes sont un fief occidental, en particulier des États-Unis. C'est une affaire de mœurs, mais aussi de politique, avec la fascination de la cybernétique comme "science de l'information et du contrôle" qui seule était admise en URSS, et dans laquelle certains chercheurs glissaient avec subrebticibilité des truffes de recherche opérationnelle, laquelle est réputée d'obédience capitaliste (alors qu'elle est d'abord militaire).

De la sorte, des virus de la "management science" se sont infiltrés à l'Est via les perturbations des systèmes cybernétiques.

Ce principe du maximum de PONTRYAGIN exprime, comme la théorie classique des extréma, des conditions locales d'optimalité. L'écriture en variables d'état en fera une recherche classique d'extrémum, mais elle implique cependant l'intervention de variables analogues aux multiplicateurs de Lagrange. Ces variables dénommées "de système adjoint" peuvent être écrites comme vecteur adjoint p(t). Dès lors, les extréma du hamiltonien définissent les lieux d'optimisation par les conditions du premier ordre, qui contiennent également les dérivées par rapport aux éléments du vecteur p(t).

C'est tout de même plus raffiné et plus complexe que cela, vu que, par exemple, le vecteur adjoint p° à l'optimum doit être orthogonal au plan tangent à l'ensemble-cible S_h des états finaux à l'horizon fixe h, ce dont les gens ne s'aperçoivent pas tout de suite et qu'ils regrettent ensuite amèrement. Bref, cela semble fonctionner pour les cas simples, et voilà donc comment on a une solution analytique au problème du régulateur linéaire avec cible fixe, puis ensuite au problème plus général du servo-mécanisme.

C'est ce modèle général du servo-mécanisme qui sera présenté ci-après. La première raison est qu'on a l'air plus malin en systémique lorsqu'on recopie cela (d'un livre ou l'autre). La deuxième raison est meilleure : c'est ce modèle qui représente l'archétype systémique, ce qui en fait le paradigme de la systémique en gestion, et qui, plus loin, sera à la base de l'imagerie d'un utopique "cyber-manager".

4 Loi de contrôle appliquée à un servo-mécanisme linéaire discret

4.1 Le Modèle hamiltonien

4.1.1 La formule 1

Soit un système différentiel en variables d'état continu. Le propos est de mettre en évidence analytiquement :

- la loi de contrôle m(t), ici un vecteur de commandes m(t)
- qui permette à un vecteur d'output y(t) de poursuivre un état d'output désiré r(t)
- alors qu'il y a un vecteur de perturbations ω(t) sur le processus
- et suivant une loi dynamique autonome gérée par l'opérateur différentiel variant F(t).

Ce modèle a donc l'allure suivante (Comme notamment chez A. SAGE, Optimum Systems Control, Prentice-Hall, 1968) :

(a) $\partial x(t) = F(t)x(t) + G(t)m(t) + \omega(t), \qquad x(t_0) = x_0$

(b $y(t) = C(t)x(t) + Dm(t)$

Le critère de performance classique s'écrit:

(c) $$J(y, \psi, m) = \frac{1}{2}[r(t_h) - y(t_t)]'S[r(t_h) - y(t_h)] + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_h}([r(t) - y(t)]'Q(t)[r(t) - y(t)] + m(t)'R(t)m(t))dt$$

On peut requérir que les matrices S, Q et R soient symétriques, et en faire un critère de pénalité quadratique, donc exprimé en moindres carrés des écarts par rapport à une cible. Ceci est très pratique puisque la dérivée (exprimant les conditions de premier ordre pour un extremum) d'une telle forme est évidemment linéaire et reflète donc une proportionnalité. D'autres procédures de recherche d'extrémum (programmation mathématique ou calcul numérique) permettent cependant de traiter des fonctions de pénalité plus variées.

Le hamiltonien impliquant le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\lambda(t)$ n'est pas triste:

(d) $$\boldsymbol{H}(x, m, \lambda, t) = \frac{1}{2}\Big([r(t) - C(t)x(t)]'Q(t)[r(t_h) - C(t)x(t)] + \frac{1}{2}\|m(t)\|^2R(t)\Big) + \lambda'(t)[F(t)x(t) + G(t)m(t) + w(t)]$$

Faisant appel au principe du Maximum de Pontryagin, et ensuite découvrant devant un public émerveillé l'argument du vecteur m de contrôle qui satisfait la condition du premier ordre du hamiltonien, soit:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial m} = 0 ,$$

on obtient respectivement pour vecteur de commande et condition sur le hamiltonien:

(e) $m(t) = -R^{-1}(t)\ G'(t)\lambda(t)$

(f) $\partial \boldsymbol{H}/\partial x = -\partial\lambda = C'(t)\ Q(t)\ [C(t)x(t) - r(t)] + F'(t)\lambda(t)$.

La condition terminale à l'horizon h est :

$$\lambda(t_h) = C'(t_h)\ S\ [C(t_h)x(t_h) - r(t_h)]$$

4.1.2 Le pilote Pontryagin

Le vecteur m(t) des commandes est en termes du multiplicateur $\lambda(t)$. Il faut donc l'expliciter et c'est là qu'intervient le génie soviétique qui a inspiré PONTRYAGIN: le vecteur des multiplicateurs est défini en termes de variables adjointes au système, désignées habituellement par $p_1(t)$, $p_2(t)$,..., $p_n(t)$, formant un vecteur de variables p(t).

Le système linéaire maltraité ici permet l'expression de p(t) en tant qu'opérateur $P(n*n)$:

(g) $\lambda(t) = P(t)\ x(t) - v(t)$,

où v(t) est un vecteur auxiliaire à traquer dans un instant.

Utilisant l'extension (g) de Pontryagin ci-dessus, le vecteur de commande m(t) devient :

(h) $m(t) = -R^{-1}(t)\, G'(t)\, [P(t)\, x(t) - v(t)]$

Dès lors, la différentielle initiale (a) s'écrit (a') :

(a') $\partial x(t) = F(t)x(t) - G(t)\, R^{-1}(t)\, G'(t)\, [P(t)\, x(t) - v(t)]$

Comme par (g),

$$\partial\lambda = \partial P(t)\, x(t) + P(t)\, \partial x(t) - \partial v(t),$$

que l'on retrouve aussi dans (f), on peut écrire la requête suivante de la part de cet opérateur auxiliaire P(t) qui est la version matricielle des équations de Riccati :

$$\partial P(t) = - P(t)\, F(t) - F'(t)\, P(t) + P(t)\, G(t)\, R^{-1}(t)\, G'(t)\, P(t) - C'(t)\, Q(t)\, C(t)$$

La condition d'opérateur P, à l'horizon h, est :

$$P(t_h) = C'(t)\, S\, C(t_h)$$

Pour pouvoir procéder à l'exploitation du vecteur de commandes optimal m(t), il faut pouvoir expliciter le vecteur auxiliaire v(t) en fonction de P(t), et surtout de la cible de référence r(t) pour une perturbation ω(t) d'espérance mathématique 0 :

$$\partial v(t) = - [F(t) - G(t)\, R^{-1}(t)\, G'(t)\, P(t)]'\, v(t) + P(t)\, \omega(t) - C'(t)\, Q(t)\, r(t)$$

et de condition terminale, à l'horizon h :

$$v(t_h) = C'(t)\, S\, r(t_h)$$

Cette expression présente bien les grandeurs qui font la gloire des servomécanismes, à savoir le vecteur de référence r(t) et son expression désirée en fin de parcours temporel (h). On aura même aperçu, dans un interstice matriciel, le vecteur de perturbations ω(t).

Le vecteur de commande m peut alors être écrit sous sa forme étendue :

$$m(t) = -R^{-1}(t)\, G'(t)\, [P(t)\, x(t) - v(t)]$$

L'opérateur P est discret, mais est explicite et peut être construit en résolvant ses équations aux différences rétrospectivement depuis la valeur extrémale au temps h. Le vecteur de commande est :

$$m_k = -R^{-1}\, G'\, F'[P_k - Q]x_k = -R^{-1}\, G'\, [P^{-1}{}_{k+1} + GR^{-1}G']^{-1}\, Fx_k$$

On voit donc une version du problème du servomécanisme qui présente deux parties :

- La première est un régulateur classique ;
- La deuxième offre un filtre linéaire déterminant la fonction de commande ("driving") de l'output du système sur la base de l'évolution (via v(t)) du vecteur de référence r(t).

On peut passer du servo-mécanisme au simple régulateur en admettant la condition restrictive que ω(t), le vecteur des perturbations, soit nul et que la référence r(t) soit constante.

Une vieille bigote qui regarde toujours le village par la fenêtre a fait remarquer cependant que la formulation en servo-mécanisme considère une commande adressée à l'output, issu d'une transformation de l'état par l'opérateur C, ce qui est au-delà de la régulation directe adressée à l'état x(t).

4.1.3 La chute de l'ancien régime

L'élégance et la classe de ce modèle sont incontestables, mais il expie celles-ci par les faiblesses des vieux aristocrates :

- Pour que le vecteur de commande m(t) puisse être opérationnellement calculé, il est nécessaire de connaître la variable auxiliaire v(t) ainsi que le vecteur de perturbations ω(t) sur tout l'intervalle qui va de "maintenant" (t_0) à un horizon (t_h). On peut difficilement rêver de disposer de telle information dès le quai de départ t_0, surtout si les perturbations sont stochastiques ;
- De plus, la résolution pour v(t) doit se faire rétrospectivement, depuis l'horizon t_h, ce qui est une vraie galère, et cette exigence a ruiné de bien nobles cerveaux (un cerval ?) ;

  C'est une des raison pour lesquelles se sont développées des approches plus opérationnelles et plus efficaces du problème d'optimisation de la commande (dit de "contrôle optimal") faisant appel à la programmation dynamique ;

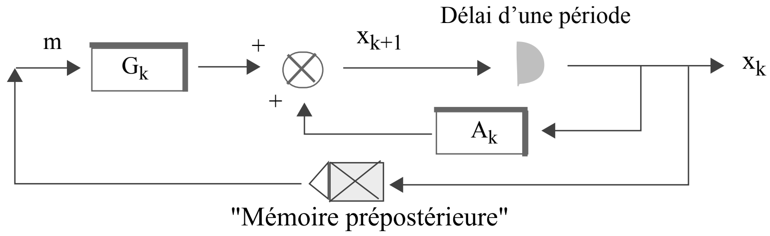
  Depuis son introduction par Richard BELLMAN (Dynamic Programming, Princeton University Press, 1957), et ensuite, KALABA, HOWARD, TOU, AOKI, qui sont de grands noms de cette voie, elle a eu un succès fou dans les loges d'opéra, et on ne parlait plus que d'elle au bar de l'Optimal ;
- Enfin, se pose le problème de l'admissibilité. Celui-ci se présente lorsque les valeurs de certaines variables sont contraintes à rester dans un lieu géométrique défini. Le plus courant en est la non-négativité, mais des expressions beaucoup plus générales peuvent être écrites, par exemple celles obligeant le vecteur d'état et le vecteur de commande à rester coincés dans des bornes.

Dans ce cas, la procédure de résolution est située dans le cadre de l'optimisation sous contraintes d'inégalité et là les approches du type lagrangien commencent à fatiguer, le relais étant pris d'évidence par la programmation mathématique et singulièrement la programmation dynamique. Néanmoins, malgré la somptuosité mathématique (et humaine) du mathématicien Richard BELLMAN (aujourd'hui décédé sans hommage alors que l'on pleure à la télé tant de saltimbanques pourris), certains, voyant dans la recherche opérationnelle une quête petit-bourgeois d'efficacité, ont comme ici un snobisme de coeur penchant pour les solutions analytiques, même inextricables, insolubles et certes inutilisables par notre personnel administratif et les gestionnaires de la science.

4.1.4 Et ce graphe ?

Un contrôleur de ce curieux type de mathématique peut être dessiné schématiquement selon la Figure 3, très proche de la figure 6.2.1. de A. SAGE (1968, op. cit.). Cette figure a l'intérêt suivant : son auteur original (A. SAGE) y dessine une entité qu'il désigne par "prestored memory" et qui est appelée ici "mémoire prépostérieure". Elle naît du problème de résolution de l'équation matricielle aux différences de RICCATI.

Figure 3. Régulateur linéaire discret : la mémoire anticipative



Du fait que cette équation doit être résolue rétrospectivement dans le temps, revenant de l'horizon t_h vers t_0, des facteurs de gains peuvent apparaître à des moments t de cette procédure. Ce sont des facteurs dits "de KALMAN" (du nom de ce mathématicien) qui sont les éléments de la matrice P(t). Ces gains sont conservés dans une mémoire (dite ici "prépostérieure") puis rappelés et appliqués au système physique lorsque celui-ci "runs forward" ("roule en avant", c'est-à-dire exerce une dynamique prospective) dans le temps réel.

Ces grandeurs peuvent être exprimées et calculées pour un problème bien posé et pas trop lourd ; le vecteur de commande, m(t) ou m_k, est obtenu à partir de cette "prestored memory", et il le porte bien sur sa Figure 3. A. SAGE en donne (op. cit., p. 95) un élégant petit exemple d'application facile de la vie courante ; il s'agit du contrôle d'un réacteur nucléaire où le contrôle est la réactivité, et la trajectoire est celle de la variable d'état densité de flux (de neutrons).

Toutefois on ne voit guère en gestion de correspondant à cette composante de servo-mécanisme qui stocke les gains de KALMAN, même en forçant une analogie. Ce sont des choses précises et mathématiques de la théorie des systèmes, et on n'a pas le droit de « forcer le destin à chaque carrefour » (comme le disait J. BREL dans Quand on n'a que l'amour) et vouloir reconnaître à tout prix des enfants systémiques illégitimes. Il y a un petit regret cependant, parce que l'on ressent bien qu'il y a des facteurs de gain numérique appliqué anticipativement (a priori) aux états obtenus a posteriori via l'exercice de la commande. Ces deux adverbes mis ensemble forment le mot "prépostérieur" cité, lequel est un fleuron de l'approche bayesienne de la décision en gestion, c'est-à-dire est un des mots-clefs de l'expression formelle d'une stratégie dans l'incertitude.

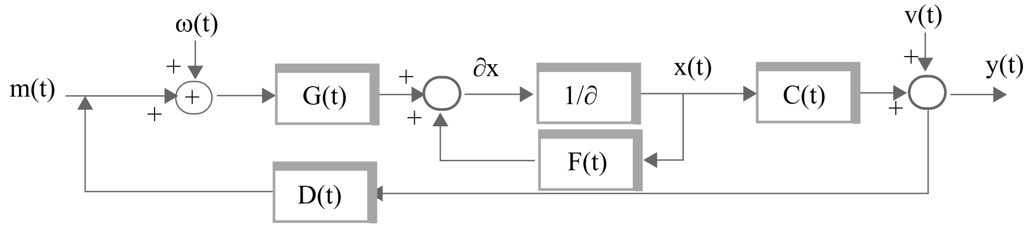
4.2 Un modèle mathématique classique du contrôle

Soit y(t) le vecteur d'output observable, ou en tout cas candidat à l'être, et un système linéaire dynamique dont le foncteur autonome est F(t). Soit aussi un input interne et à présent deux inputs externes additifs différents :

- m(t) pour input de commande ("manipulable") ;
- Soit ω(t) un input perturbant le processus et qui s'additionne à l'input de commande ;
- Soit v(t) qui se compose avec le vecteur d'état x(t) pour former le vecteur d'observation y(t). Ce v(t) pourrait représenter des erreurs de mesure aléatoires.

La représentation de cette dynamique est celle de la Figure 4.

Figure 4. Perturbations sur un régulateur linéaire continu



Le système de contrôle a donc trois entrées :

- L'input des commandes m(t) ;
- Les perturbations sur le processus ω(t) ;
- Les écarts aléatoires ou distorsions de l'observation v(t).

Il va de soi que la tâche du contrôle se complique : un des problèmes qui se posent dans ce contexte est celui de l'estimation de l'état x et de ω. En effet :

- L'état x(t) n'est plus obtenu de façon déterministe par le processeur ; il apparaît selon une loi stochastique, laquelle est engendrée par les propriétés statistiques de ω(t) ;
- L'observation y(t) est affectée d'une composante qui demande à estimer l'objet réel, c'est-à-dire ici de reconstituer le signal d'état x(t) à partir du signal observable y(t), sachant qu'un processus stochastique a pu entre-temps en masquer les valeurs vraies.

4.3 La contrôlabilité

Il est enrageant d'apprendre que la contrôlabilité est une propriété mathématique et non une propriété réelle ou pratique d'un système. On ne voit d'ailleurs pas très bien quelle exploitation ménagère courante peut être espérée de cette propriété (dont l'homme de ménage se passerait d'ailleurs fort bien) autre que celle qui est associée aux systèmes symboliques, où elle n'est d'ailleurs obtenue que pour un système linéaire qu'on dit simple.

Le temps de la gestion étant haché en tranches comptables (appelées "exercices", prouvant par là que la fiscalité est un sport demandant de l'entraînement), cette propriété sera exprimée pour un système discret, et pour une seule variable de contrôle, disons m_1. Une définition de la contrôlabilité sous ces conditions est alors la suivante :

> Un état initial x_0 possède la propriété de contrôlabilité s'il existe une séquence de commandes finie, m_{1k}, pour k=0,1,..., s (où s peut dépendre de x_0), telle que $x(nT; x_0; m_{1k}) = 0$.
>
> Si tout état initial est contrôlable, on dit que le système est entièrement contrôlable.

Cette définition n'a au fond qu'une signification de translation : si un système est complètement contrôlable tout état initial peut être transféré à tout autre état, donc aussi en particulier à une origine choisie (le moment k=0), en un intervalle de temps fini. La propriété de contrôlabilité relève donc de celle de réversibilité temporelle. Ceci va bientôt impliquer l'indépendance de vecteurs associés aux transitions.

Plus spécifiquement, soit un système linéaire discret dans ses notations habituelles, les vecteurs x, y et m étant de dimensions respectives n, m et p, et le repère temporel k situe un écoulement de kT intervalles de temps de longueur. C'est (4) !

$$(4)\begin{cases} x_{k+1} = F(T)x_k + G(T)m_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

La matrice G spécifie au fond comment le système est contraint par rapport aux inputs ; par exemple, un élément {ij} de la matrice G est le facteur de gain de la variable de commande m_j apporté à la variable d'état x_i. Si n'importe quel état peut être atteint directement par les inputs, le système est dit non-contraint par rapport à l'input. De même, la matrice C révèle l'output y si les variables d'état x ne sont pas directement mesurables.

Selon une telle configuration, la matrice de transition Φ(T) et celle de la transmission directe (selon la matrice D déjà présente sur la Figure 4) sont... (5) !

$$(5)\begin{cases} \Phi(T) = e^{FT} \\ \Gamma(T) = \left(\int_0^T e^{F\tau} d\tau\right) D \end{cases}$$

Quant à la réversibilité, elle est associée à la propriété de cet opérateur Φ(T) ; elle s'écrira :

$$\Phi(-jT) = \Phi^{-j}(T)$$

La contrôlabilité est alors établie (par KALMAN) par le fait que n vecteurs parmi les np figurant dans G, $F^{-1}G, \ldots, F^{-n+1}G$ soient linéairement indépendants.

4.4 L'observabilité

4.4.1 Définition

L'observabilité est parfois considérée comme le "dual" de la contrôlabilité. Elle concerne, on s'y attend, la matrice C dite d'observation dans $y_k = Cx_k$ (en discret ou continu), et qui définit la structure de contraintes de l'output. Le problème est cette fois de pouvoir reconstruire les valeurs des variables d'état x selon les mesures faites sur y. Une solution est directe mais exceptionnelle si la matrice C n'est pas singulière ; sinon, l'observabilité demande de pouvoir remonter aux conditions d'état initiales, selon la définition suivante :

> Un vecteur d'état initial x_0 possède la propriété d'être observable s'il existe une séquence finie de mesures $y_1, y_2, \ldots, y_s$ qui permette de le déterminer. Le système est complètement observable si ceci est vrai pour tout état initial choisi.

4.4.2 Cas du système invariant

Lorsque la variable d'output observable est un scalaire tel que dans le système simplifié suivant, où la matrice d'observation est ramenée à un vecteur c[n] appliqué au vecteur d'état x[n], le foncteur F est simplement une matrice A [n∗n], et G est [n∗m]:

$$(6)\quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Gm_k \\ y_k = c'x_k \end{cases}$$

Ici, le signal d'output mesurable "y" est unique (puisque c'est un scalaire) et il peut être pertinent de pouvoir déterminer tout le vecteur des états x_k [n∗1] sur base de ce seul signal d'output. Étant donné cette disparité de dimensions, il va de soi que pour reconstruire cet x, il faut disposer au moins d'une série de valeurs de y, connue au temps présent et sur un intervalle de temps passé. L'observabilité complète demande que ce soit possible.

Le système invariant (6) permet de voir cela de façon simplifiée. Une itération récursive de q unités de temps donne l'état en (k-q):

$$x_{k-q} = A^{-h}x_k \text{ , pour h=1,2, ...}$$

Appliquant l'opérateur d'output c, on a:

$$(7)\quad y_{k-q} = c'A^{-h}x_k = q_h\, x_k$$

La matrice A étant [n∗n], q est un vecteur [n]. On peut écrire (7) pour toute itération récursive, partant de "maintenant", c'est-à-dire k, et s'arrêtant à k-n+1 sous peine de tomber dans le vide:

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \dots \\ y_{k-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 x_k \\ q_1 x_k \\ \dots \\ q_{n-1} x_k \end{bmatrix} = qx_k$$

Dès lors, pour obtenir x_k en fonction de y, il faut pouvoir résoudre:

$$(8)\quad x_k = Q^{-1}\, y^*,$$

où y* est le vecteur des n valeurs récursives. Ceci est possible si la matrice Q[n∗n] des n vecteurs q[n] est non-singulière, donc si A, c'A, c'A², ... et c'A^{n-1} sont des vecteurs indépendants.

4.4.3 Cas du système variant

Lorsque le système est variant (donc les opérateurs sont fonction du temps), l'observabilité est plus exigeante et cela surtout s'il s'agit d'un vecteur y d'output, affecté d'un vecteur de composantes aléatoires v_k, et d'une matrice d'observation C, tel le système discret (9):

$$(9)\quad y_k = C_k x_k + v_k$$

Dans ce cas, soit $\phi(k, k_0)$ la fonction de transfert d'état de k_0 à k, à savoir:

$$x_k = \phi(k,k_0)\, x_{k0}$$

Les choses sont moins simples, à présent, car l'état initial, que nous situons en k_0, s'estime en fonction du vecteur d'output observable y(t) par (SAGE, op. cit., p. 293):

$$\hat{x}_{k_0} = M^{-1}(k_0, k_h)\sum_{k = k_0}^{k_h} \Phi'(k, k_0)C'_k R_k^{-1} y_k$$

où:

$$M(k_0, k_h) = \sum_{k = k_0}^{k_h} \Phi'(k, k_0)C'_k R_k^{-1} C_k \Phi'(k, k_0)$$

La belle matrice de transition F a déjà été remarquée; on vient de la croiser en se promenant sur l'équation (5) et, dans la réversibilité, on l'a même retournée pour la regarder de dos. Il faut à présent que la matrice M soit non-singulière, ce qui est la condition d'observabilité. Ainsi, s'il y avait plusieurs intégrateurs en cascade, la non-connaissance des conditions initiales d'un des intégrateurs suffirait déjà à rendre le système non-observable, la matrice M devenant singulière.

Ces considérations forment des extensions de la problématique de base; elles ont donné lieu à des développements spécifiques du contrôle. Ainsi le problème d'estimation du signal d'état demande de superposer des opérateurs statistiques aux opérateurs déterministes cités jusqu'à présent, en se rappelant que, selon (9), y(t) a une composante additive v(t) qui est une perturbation pouvant être stochastique.

Ceci conduit à exprimer par exemple des covariances d'états ou à viser l'obtention d'une fonction statistique de la performance, telle son espérance mathématique ou une probabilité de ne pas dépasser un seuil donné.

Des apports initiaux marquants dans ce domaine sont des filtres dus à N. WIENER (1949), ensuite les filtres de Kalman, suivis de généralisations du contrôle optimal stochastique, un fleuron de la théorie des systèmes dont un grand nom est celui de AOKI, objet de ruées passionnées dans les bibliothèques municipales.

5 Le modèle général sous contrôle et... le paradigme "système"?

5.1 Expression algébrique de la forme canonique

Le terme "modèle linéaire général sous contrôle" désigne ici celui qui reprend tous les éléments des configurations traitées jusqu'à présent et sa formulation aura le nom générique de forme canonique (linéaire). Celle-ci assemble mathématiquement les composantes réunies sur l'Encart 1 et qui vont former pour ces exposés le paradigme "système".

Encart 1. Forme canonique (linéaire) du modèle de dynamique sous contrôle

Forme canonique continue

a Une dynamique d'états x sous influence d'un vecteur de contrôle m mais subissant des interférences ω :

$$\partial x(t) = F(t)x(t) + G(t)m(t) + \omega(t),\ x(t_0) = x_0$$

b Un ensemble d'ouputs observables y, mais subissant des transmissions directes D.m et des perturbations v:

$$y(t) = C(t)x(t) + Dm(t) + v(t)$$

c Un vecteur de commande m(t), écrit ici sous sa forme étendue via l'approche de Pontryagin :

$$m(t) = -R^{-1}(t)\ G'(t)\ [P(t)\ x(t) - v(t)]$$

d Une fonction de performance J(y,m), par exemple la quadratique suivante (de matrice S) ou son espérance mathématique, minimisant (selon l'expression m'Rm) l'énergie de contrôle et la distance (de matrice Q) entre l'output y et une cible r(t) de référence :

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{r}(t_h) - \mathbf{y}(t_t)]'\mathbf{S}[\mathbf{r}(t_h) - \mathbf{y}(t_h)] +$$
$$\int_{t_0}^{t_h} ([\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)]'\mathbf{Q}(t)[\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)] + \mathbf{m}(t)'\mathbf{R}(t)\mathbf{m}(t))dt$$

La récursive depuis l'horizon du contrôle, qui implique donc la contrôlabilité, est P(t) :

$$\partial P(t) = - P(t)\ F(t) - F'(t)\ P(t) + P(t)\ G(t)\ R^{-1}(t)\ G'(t)\ P(t) - C'(t)\ Q(t)\ C(t)$$

Forme canonique en intervalles discrets

[Comme A. SAGE, op.cit. p.131, mais dans les notations propres au présent exposé] :

$$m_k = -R^{-1}\ G'\ F'^{-1}[P_k - Q]x_k = -R^{-1}\ G'\ [P^{-1}_{k+1} + GR^{-1}G']^{-1}\ Fx_k$$

$$P_k = Q + F'P_{k+1}\ [I + GR^{-1}G'P_{k+1}]^{-1}F$$

5.2 Expression graphique de la forme canonique

Les Figures 5 et 6 sont les configurations de cette forme canonique, où elles utilisent les conventions suivantes, comme dans l'exposé sur «La Dynamique sous influence»:

- Le cas continu utilise l'opérateur inverse, $1/\partial$, pour l'intégration de x (sur la Figure, x est pointé pour la dérivée) lui donnant son nouveau niveau x(t);
- Dans le cas discret c'est l'opérateur des transformées inverses z^{-1} qui indique le déplacement d'un intervalle de temps.

Figure 5. Forme canonique de la dynamique continue sous contrôle

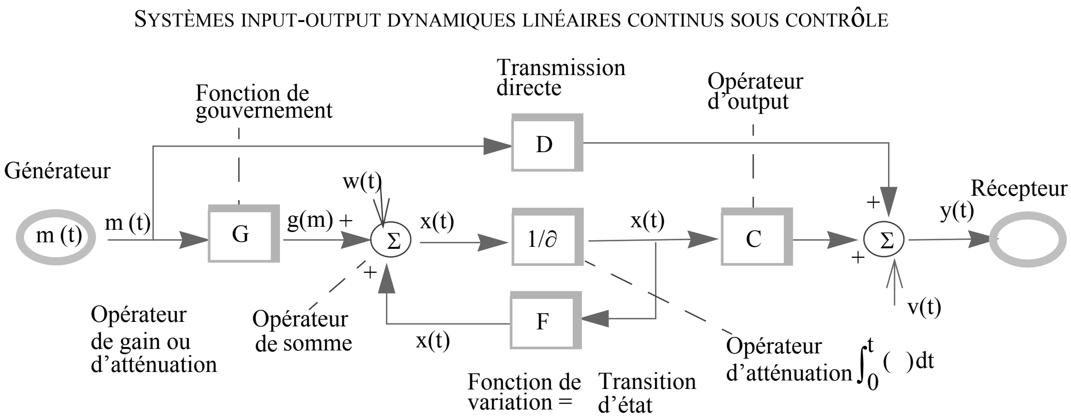
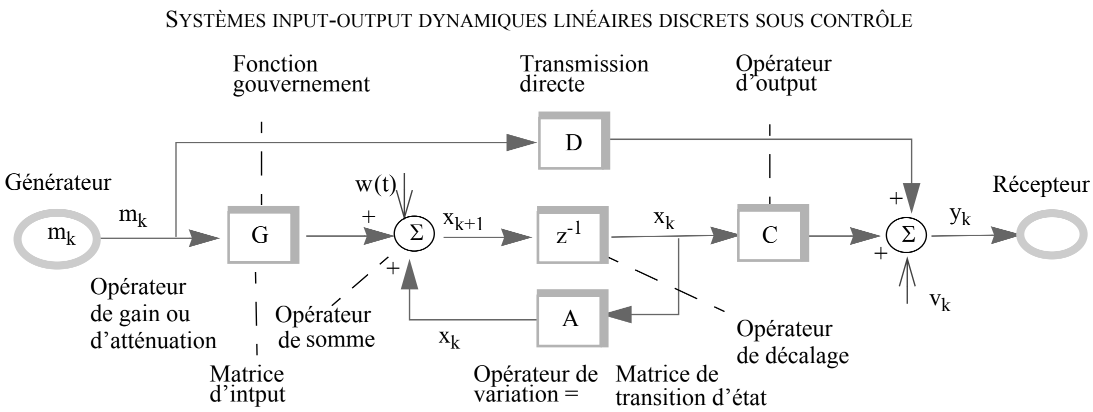


Figure 6. Forme canonique de la dynamique discrète sous contrôle



Cette forme canonique, et sa configuration, définit ici le paradigme système.

5.3 Un petit machin ?

La forme canonique et sa représentation graphique donnent le grand frisson : ce système a l'air prometteur et, muni d'un tel engin, on est parti pour une cybergestion dont on va dans un instant entendre des nouvelles... déplorables.

D'abord, si les écritures sont somptueuses, les exemples numériques praticables le sont beaucoup moins ; cela ressemble à :

$$(10)\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{1(k+1)} \\ x_{2(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} m_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} \\ J_n = \sum_{k=0}^{n} [y_k^{\ 2} + b m_k^{\ 2}] \end{cases}$$

Pour ne pas se fatiguer inutilement, on n'a même pas écrit dans (10) les perturbations ω (sur les états) et v (sur l'output) mais peu importe. On est donc loin d'un Kybernetes, d'un "Grand Timonier", encore que ce qui précède ne soit que le minimum vital en la matière. Le fait est que la résolution du problème (10) est déjà un travail non-négligeable quand il s'agit d'optimisation sur un intervalle temporel $[t_0 ; t_h]$, ou même à son arrivée à l'horizon h de la planification. En effet, il faut disposer à cette fin d'un algorithme ou d'une heuristique rétrospective, que ce soit pour expliciter l'opérateur de Pontryagin (la transformation de Riccati) selon l'approche analytique, ou en suivant d'autres méthodes qui n'ont pas été citées ici. De la sorte, (10) demande déjà du travail sérieux et de l'instruction.

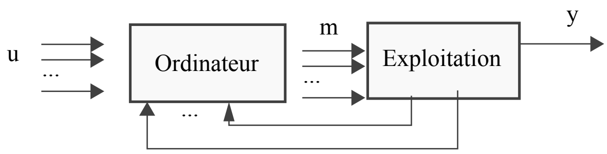
Que dire alors d'un "vrai" gros système dynamique, par exemple celui de la page 106 de TITLI & Al (Analyse et commande des systèmes complexes, Cepadues Éd., Toulouse, 1979), qui représente le réseau de la partie synthèse d'un processus de production d'ammoniac et dont on veut optimiser le contrôle ? Même la puissance de la programmation dynamique due initialement à R. BELLMAN (1957, op. cit.), demande du souffle à s'éreinter de calculs.

C'est pourquoi la Figure 7 (rappelant la Figure 1b) en revient à ce design du contrôle digital (par ordinateur) qui n'utiliserait plus le modèle du feed-back mais une transaction constante entre des signaux d'entrée et une consigne (multiple). Ce mode de commande est alors prospective mais, vu que les temps opérationnels de calcul deviennent négligeables, et vu la flexibilité croissante des systèmes physiques, elle devient quasi "en temps réel".

De la sorte, une approche plus moderne de ces modèles d'avant le fameux Windows, qui dit tant de bien de soi-même, devrait surtout préparer la commande réelle par une description de la dynamique, puis l'exploitation de puissantes routines pré-programmées pour montrer les trajectoires obtenues et rechercher les meilleures voies pour les obtenir (où "meilleures" implique un critère de performance).

Ceci fait, on confierait la réalisation à une commande par ordinateur, qui sait quoi faire, car, grâce aux simulations, il a pu être pré-programmé à cette bonne fin.

Figure 7. Rappel du processus de contrôle digital multivarié



Ainsi, pour faire virer et passer sous le pont Kennedy de la Meuse un chaland de 80 mètres poussé par derrière comme un Japonais dans le métro, on ne doit pas résoudre un nouveau problème de PONTRYAGIN ni passer son temps à chercher à ce moment-là les conditions de convergence de trajectoires par les racines du "root locus" dans le plan complexe. À ce moment, en effet, il vaut mieux consacrer rapidement ses maigres muscles et ses petits trucs atrophiés à essayer de faire un virage avant de se péter le nez sur la pile du pont. La cible repérée, les processus admissibles et les contraintes étant déjà connues, c'est un programme qui prend en charge le processus.

Les agents humains ne font... rien. La systémique en gestion c'est, comme annoncé, utiliser quelque chose d'inventé par un tiers, de programmé par un autre, et qui fait les choses à votre place.

Dans le domaine du contrôle, la distinction est généralement faite entre les contrôles optimaux (adaptatifs lorsque les paramètres se modifient, par un "tracking signal", en fonction de performances constatées) et les contrôles en feed-back.

- Les modèles d'optimisation, ou adaptatifs, ont une mesure de performance associée au système global, formellement écrite comme fonction dite d'objectif (ce qui par ailleurs est une expression peu adéquate) ;
- Les modèles de contrôle à feed-back n'ont pas ce design, de sorte qu'on doit y définir un ensemble de politiques admissibles et conduire leur évaluation via des critères relatifs à la stabilité et la convergence plutôt que relatifs à l'optimisation.

Cette distinction est importante parce que tant qu'on utilise la théorie des systèmes dans sa version analytique du contrôle optimal, on poursuit explicitement un critère d'optimisation, tel que maximiser le rendement d'un portefeuille, minimiser les gaspillages d'un processus de production etc.

La dynamique des systèmes appliquée à la gestion (par des programmes de simulation) ne pourra en revanche obtenir que de limiter les écarts par rapport à des références ou maintenir des grandeurs dans des intervalles admissibles, ce qui est la mission essentielle des régulateurs fondés sur le feed-back.

6 Exemples de modèles de contrôle appliqués à la gestion

6.1 Les pionniers

Les formulations analytiques de systèmes dynamiques et de leur contrôle peuvent servir pour contrôler un réacteur nucléaire ou la propagation de chaleur sur des pièces métalliques et autres petits jouets des enginiers, mais paraissent peu utilisables quand il s'agit de gestion des Ensembles d'Activités Humaines dont les facteurs de complexité ne permettent évidemment pas des ambitions aussi formelles.

Mais alors n'y a-t-il pas de "modèle de contrôle" publié en gestion ? La réponse est que bien sûr que si que oui, mais dans le sous-domaine qui s'y prête, disons de la "management science", en général reprise largement en charge par la recherche opérationnelle.

- En 1952, par exemple, H. SIMON, devenu célèbre pour d'autres raisons moins avouables, a déjà présenté un petit modèle de contrôle (un servomécanisme) concernant la gestion de la production. Il est publié dans « On the Application of Servomechanism Theory in the Study of Production Control », Econometrica, 20, 1952, pp. 247-268.
- Des auteurs comme TEICHROEW et CONNORS, dans Optimal Control of Dynamic Operations Research Models, International Textbook Company, 1967, et BENSOUSSAN, HURST & NASLUND dans Management Applications of modern Control Theory, North Holland, 1974, y ont apporté des contributions significatives.
- La fameuse routine de programmation dynamique stochastique de R.A. HOWARD, parue dans Dynamic Programming and Markov Processes, Wiley, 1960, fut l'idole des Golden Sixties dès qu'on a trouvé un instrument de calcul pour jouer sa musique.

6.2 Le "servomécanisme" de H. SIMON

6.2.1 Formulation du modèle

Dans cet exemple de gestion de la production à un seul produit, SIMON se dit "exploratoire" et vise autant à montrer les formulations et leurs implications que de résoudre un problème, de sorte que le modèle initial paraît un peu léger, mais il devient ensuite plus réaliste. Évidemment, on se contentera d'en dire ici quelques points-clefs pour susciter la jalousie des Lectrices et non pour la remplacer.

- Dans une première version, il s'agit de décider du taux de production en fonction de l'écart entre le niveau de stock désiré et le niveau obtenu ;
- Dans une deuxième version, le taux de production ne répond à l'injonction de produire qu'après un délai et le système subit, comme second input, les variations de la demande auxquelles il faut répondre par une politique stable et raisonnable.

Il est remarquable qu'un grand nombre de formulations ultérieures, notamment la vague importante de « Systems Dynamics » initiée par FORRESTER au MIT, soit structurellement un développement discret et simulé issu de cette formulation.

Les notations et les symboles graphiques de H. SIMON sont transposés ici pour correspondre à cette salve d'exposés, mais il va de soi que tout est respecté par ailleurs. Soient :

- y(t) Un niveau de stock, qui est ici l'output du contrôle ;
- r(t) Le niveau désiré (la consigne, supposée constante) ; elle peut être mise à zéro par sa propre addition ou soustraction ;
- m(t) Le taux de production (par unité de temps), variable de commande ;
- D(t) La demande (en fait le taux de livraisons) ;
- e(t) L'écart entre le niveau de stock désiré et le niveau obtenu ;
- K_j Les opérateurs et facteurs de gains.

Il s'agit de déterminer une politique de production m(t) en fonction de l'écart e(t). Le critère de performance est que cette politique donne des réponses réalistes et maîtrisées aux fluctuations de D(t). Un comportement oscillatoire serait inquiétant (on n'aime guère les instables dans les milieux suisses de la gestion) ou pire, un comportement divergent, lequel serait déjà très mal vu chez nous et certes inadmissible dans une entreprise japonaise.

Pour avoir une formulation à feed-back, ou qui puisse être amenée à une telle propriété, il faut que le vecteur de commande m(t) soit informé de y (et de la référence r) pour tout t. La formulation est :

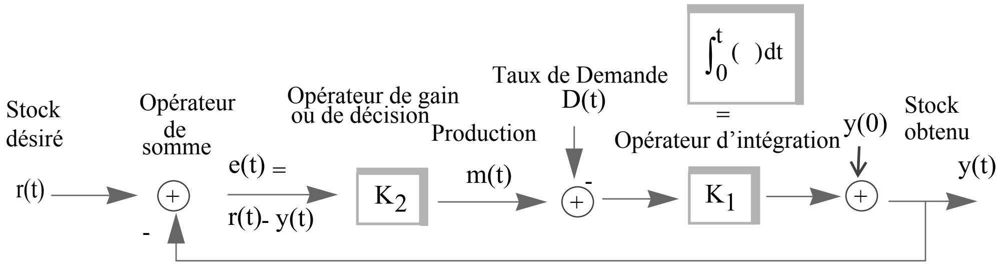
$$y(t) = K_1\,[m(t) - D(t)]$$

$$m(t) = K_2\,[e(t)]$$

$$e(t) = y(t) - r(t)$$

La Figure 8 est une représentation de ce modèle, issue de la publication citée, mais graphiquement adaptée ici dans un souci d'homogénéité. On reconnaît un design de contrôle (et pas de simples flux) par le fait que l'input initial est le niveau désiré, donc la "référence" ou consigne, et de ce fait est de la nature d'une information. La demande entre comme input (d'information) via l'opérateur de sommation mais, du point de vue des flux réels, elle "sortirait" du stock.

Figure 8. Le servomécanisme de H. Simon



K_1 correspond à un intégrateur puisque la dynamique est :

$$\frac{dy}{dt} = K_1[m(t) - D(t)]$$

et K_2 représente la règle de décision, la production en fonction de l'information sur e(t).

6.2.2 Remarques intelligentes

Sur la Figure 8 les flèches sont unidirectionnelles. L'implication de cette propriété, qualifiée de "couplage unilatéral", est que l'input de référence et l'input dit "de charge" (dans ce cas, la demande) ne sont pas affectés par le comportement du système et peuvent donc être considérés comme indépendants et avoir librement leur propre dynamique. Ce sera le cas de toutes les variables qui comme D(t) ne figurent pas dans une rétroaction (ou une interaction par bouclage) et c'est ce qui permet de les qualifier d'exogènes par rapport à un design spécifique.

- Un contre-exemple pas trop naïf serait une demande D(t) qui s'adresse plus ou moins intensément à cette production selon l'information qu'elle a du niveau de stock qui y est disponible ;
- Une autre version contredisant ce couplage unilatéral serait dû à une référence (le niveau désiré), dépendante des conditions d'output ou de variables endogènes. Ce choix peut être raisonnable en gestion de la production et conduit à des modèles plus généraux que l'on retrouvera dans «La Dynamique de systèmes en gestion».

On voit bien ici la condition qui donne sa propriété fondamentale à un servomécanisme :

> Il y a en principe un chemin prospectif à haute charge et/ou à haute énergie, qui conduit un input vers un output. Ce chemin se garnit d'un bouclage à (comparativement) faible énergie, qui en est un chemin rétrospectif, lequel affecte l'input de façon négligeable.

Cette énergie de correction (obtenir la conformité de l'output) est issue de l'information sur l'écart e, qui peut utiliser une énergie extérieure – précisément un amplificateur. Si on s'en tient bien à cette théorie, c'est en gestion avec cette faible énergie qu'on fait un "Chef".

6.2.3 Les politiques de contrôle

Cette formulation est le support qui a permis à H. SIMON d'appliquer les quatre politiques de contrôle à feed-back, lesquelles expriment la variable de commande m(t) en fonction de l'écart e(t) entre le stock désiré et atteint, et du taux de demande D:

- Le contrôle proportionnel $m = -a_1 e + D$
- Le contrôle différentiel $m = -a_2 \partial e + D$
- Le contrôle intégral $m = -a_3 \int e\, dt + D$
- Le contrôle mixte $m = -a_1 - a_2 \partial e - a_3 \int e\, dt + D$

Les coefficients sont non-négatifs et en principe connus a priori. Ces "politiques" sont les expressions possibles de la règle de décision K_2.

Une des façons classiques d'analyser un tel problème est d'utiliser les transformées de Laplace dont l'argument est le complexe "s", ayant donc une composante imaginaire. On obtient les transformées de Laplace de l'output en combinant les transformées des inputs qui y interviennent. Comme on l'a dit dans les développements théoriques, la fonction de transfert du système est le rapport de la transformée de la fonction d'output y(s) à la transformée de l'input, ici D(s).

En exprimant la transformée inverse de la fonction d'output y(s), on quitte l'espace fréquentiel (celui de s) et revient dans l'espace temporel (celui de t). On s'assied dans cet espace-là et on regarde passer l'output y(t). Si sa tête ne plaît pas, qu'il oscille, qu'il diverge ou est incapable de marcher sur une ligne jaune tracée par terre, c'est que la politique de contrôle K_2 n'est pas bonne et qu'il faut en essayer une autre. Ce n'est pas trop difficile (quand c'est simple...) avec cet outil-là car la transformée de la dérivée d'une fonction (de condition initiale 0) est s fois la transformée de cette fonction. Dès lors la dérivation dans le domaine temporel (d/dt) correspond à la multiplication par s dans le domaine fréquentiel et l'intégration correspond à la multiplication par 1/s. Dans cet espace, l'argument de Laplace apparaît donc comme un opérateur de trafics algébriques.

Éclairé par ces explications, qu'obtient alors l'ami SIMON, à part le prix de la Fondation Nobel ? Une expression de la transformée de Laplace de la fonction de commande m(t) qui est "valide" en ce sens qu'elle induit un comportement raisonnable du stock tel que:

$$K_2(s) = a/p + b$$

La ramenant dans l'espace temporel, elle s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} m(t) = ae(t) + b\frac{\partial}{\partial t} e(t)$$

Ceci veut dire (en traduisant SIMON, op. cit., p. 257) que, parmi les politiques de contrôle, la règle de décision suggérée est que le taux de production devrait être accru ou décru d'un montant proportionnel au défaut ou à l'excès du stock, plus un montant proportionnel au taux auquel le stock décroît. Les constantes de proportionnalité a et b devraient être grandes pour maintenir le stock dans des bornes assez étroites. De plus, pour éviter des oscillations il faut satisfaire la condition:

$$b^2 > 4a$$

Un résultat qui a surpris même des téléspectateurs, pourtant blasés, est que la simple règle proportionnelle, donc la première politique de contrôle mentionnée, c'est-à-dire $\partial m(t)/\partial t = a * e(t)$, engendre des oscillations non-amorties. Par ailleurs, SENGUPTA et FOX (dans Optimization Techniques in Quantitative economic Models, North Holland, 1969) montrent que la quatrième politique, c'est-à-dire celle qui est mixte, engendre des oscillations sauf si des conditions de relation très restrictives entre les paramètres sont satisfaites.

Mais Mademoiselle ne pourra pas accompagner ces auteurs-là dans leur visite guidée de la programmation dynamique non-linéaire, car ils emmènent aussi leurs touristes dans les «Models of Firm Behavior» (Chap. 6) d'où, malgré la beauté des servo-sites de gestion présentés, la plupart des touristes n'ont pas reparu, et ces sites sont à présent un peu négligés. Ses pentes étant trop abruptes, et les moyeux de l'âge commençant à grincer, on ne pourra pas non plus suivre ici cette publication. Il faudra remonter à vélo pour suivre SIMON dans sa version complète.

6.3 Version complète du modèle de H. SIMON

La version présentée en 6.2 a été généralisée par SIMON dans la même publication. Les rajouts, avec des notations de variables rendues ici cohérentes, sont les suivants.

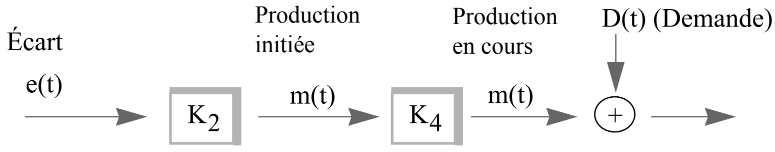
Le premier rajout est un délai "τ" entre le moment où une injonction de production (c'était m(t)) est donnée et celui où elle est effective, ce qui sera à présent $\mu(t)$. La relation entre m(t) et $\mu(t)$ est donc:

$\mu(t) = m(t-\tau)$, soit $\mu(t) = K_4\, m(t)$, ce qui est représenté par la Figure 9.

Dans le domaine des transformées de Laplace, l'opérateur d'un tel délai est:

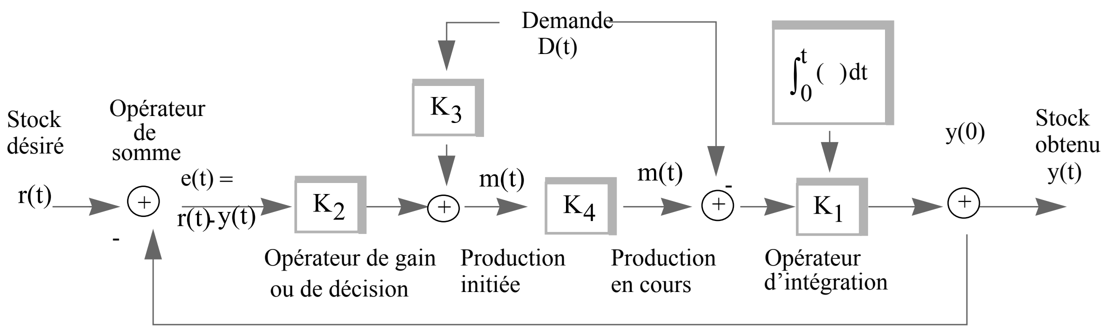
$$K_4(s) = e^{-st}$$

Figure 9. L'opérateur de délai de H. SIMON



Le second rajout est que la demande D(t) informe la décision de production, m(t) comme dans les modèles théoriques. Au total, la nouvelle configuration est celle de la Figure 10, redessinée selon la «Figure 3» de la publication citée.

Figure 10. Le servo-mécanisme de production de H. SIMON



La formulation complétée de la sorte est:

- $y(t) = K_1 [\mu(t) - D(t)]$
- $\mu(t) = K_4 m(t)$
- $m(t) = K_2 e(t) + K_3 D(t)$
- $e(t) = r(t) - y(t)$

K_1 reste un opérateur d'intégration (de transformée 1/s) et K_4 un opérateur de délai. À présent, la règle de décision est composite, étant formée de K_2 et de K_3. Utilisant cette formulation comme base de lancement, SIMON montre plusieurs résultats d'analyse qui, encore aujourd'hui, sont sujets de recherche de méthodes de solution. Ainsi il montre deux résultats très importants (conditionnellement à ce modèle) :

- Si on stabilise y(t) (le niveau du stock), le taux de production ne sera pas constant mais devra suivre la demande D(t);

- Si on stabilise le taux de production m(t), l'output y(t) (le niveau de stock) ne sera pas constant mais suivra l'intégrale de D(t).

L'argument qu'il présente (op. cit. p. 261) est :

> We cannot devise a system that will simultaneously eliminate inventory and production fluctuation, but must, instead, establish a criterion that is some weighted average of these.

Quels sont les critères de performance ? Dans un tel contexte, il s'agit normalement de minimiser des coûts, en particulier des coûts de production et de stockage. Ici, il s'agit plutôt de la performance du contrôle que celle du management, ce qui veut dire que les charges fixes, les coûts proportionnels (à la quantité) n'en sont pas les clefs, mas bien les coûts de divergence, d'oscillation, disons plus pratiquement de variation.

Cette variabilité peut se formuler de deux façons :

- Par l'intégrale du carré des écarts de niveau du stock par rapport à son niveau désiré (déjà exprimé plus haut) ;
- Par les variations de production autour d'un niveau stationnaire, car ces fluctuations sont pratiquement plus coûteuses, par exemple en logistique, main-d'oeuvre, ajustements et transferts d'activité.

Ceci peut être illustré par la transcription du très classique critère "J" introduit à la section 4 de cet exposé avec ses notations, mais qui ne figure pas dans la publication de SIMON :

$$\mathbf{J}(y, r, \mu) = \frac{1}{2} \cdot [\mu(t) - \bar{\mu}]'\mathbf{S}[\mu(t) - \bar{\mu}] + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_h} ([r(t) - y(t)]'\mathbf{Q}(t)[r(t) - y(t)])dt$$

Les définitions restent r(t) pour le niveau de référence (désiré) du stock obtenu y(t), lequel est l'output du système de contrôle ; le niveau quasi-stationnaire du taux de production est noté $\bar{\mu}$:

- Le premier terme est alors l'expression du coût quadratique (par la matrice S) des fluctuations de la production ;
- Le deuxième terme est bien l'intégrale des écarts quadratiques (par la matrice Q) du stock autour de sa consigne r(t).

Cette expression de "J" n'est donc pas explicite chez SIMON. D'ailleurs, les critères de performances sont souvent qualitatifs dans ce domaine dynamique, en sens que, paradoxalement, ce sont les comportements (admissibles ou instables), plutôt que les "chiffres" qui sont l'apport de la modélisation. Ceci sera aussi vrai dans la version discrète simulée mise de ce même problème présentée dans l'exposé « La Dynamique de systèmes en gestion ».

6.4 "Applications au management de la théorie moderne du contrôle"

6.4.1 Objet de la contribution

Par leur ouvrage « Applications au management de la théorie moderne du contrôle », BENSOUSSAN, HURST et NASLUND (ci-après "BHN"), ont fait défiler sur les podiums de la gestion des modèles très élégants dont ils lancèrent la mode en 1974. Leur parcours a certes fait tourner de l'oeil bien des systémiciens, donnant à penser que cette version pionnière de modèle de contrôle, qui exprime la "théorie micro-économique [de la firme]", est ce qui ressemblerait le plus à une version "système" de l'entreprise.

- À partir de la page 75, BHN présentent d'abord, au §1, un modèle de base dont une petite initiation est reprise ci-après au titre de zakouski, la suite leur laissant la parole ;
- Au §2, ils étudient le modèle d'une firme qui peut choisir entre le financement interne et externe dans sa recherche du chemin optimal de croissance. L'objectif déclaré est la maximisation de la valeur actuelle du flux de profits et la richesse finale ;
- Le §3 est consacré à l'analyse de la combinaison optimale des facteurs de production pendant la croissance ;
- Ensuite se présentent les problèmes financiers, les décisions optimales de prix et produits, et enfin les décisions de montant optimal de dépenses de publicité.

6.4.2 Le modèle initial de BHN

Le modèle simplifié de croissance de la firme selon BHN utilise les notations suivantes :

- X le capital (on s'intéresse à l'évolution de sa valeur, indication de la taille) ;
- α le taux de dépréciation ;
- μ le taux d'investissement en capital ("formation brute de capital fixe") ;
- Ψ la fonction de profit brut ;
- b une constante qui exprime le fait que son complément (1-b) doit être versé en tant que dividende (donc n'est pas réinvesti).

La formulation de l'optimisation analytique du système de contrôle optimal est :

$$\begin{cases} \max \int_0^{\infty} (\Psi(X) - m) e^{-rt} dt \\ \partial X + \alpha X = \mu \\ m \leq b\Psi(X), \quad 0 \leq b \leq 1 \end{cases}$$

Il est beau d'écrire une intégrale de "0 à ∞" mais où, dans le temps réel, est ce "zéro" ? L'infini, lui, on le repère facilement (sur le clavier du PC), mais le zéro temporel, en revanche, refait surgir la question : "quand se situe le début, le temps "0" de la dynamique (d'un EAH)?", déjà posée dans « La Dynamique sous influence », donc. Outre ce problème de conditions initiales (de quel état initial il est significatif de décrire l'évolution), se pose celui de la taille de départ (en t=0, donc "x(0)"). Il est d'ailleurs réaliste de s'interroger sur la masse critique nécessaire au départ pour occuper une place notoire et avoir un potentiel concurrentiel en affaires.

Ceci dit, un des problèmes de dynamique de contrôle posé par les auteurs cités concerne la capacité d'emprunt, exprimée comme suit :

- Si le taux de croissance est constant, on suppose que celui de la dette est similaire, de sorte que l'effet de levier est constant ;
- Si la croissance est variable, le problème de décision d'emprunt et de trajectoire de croissance doivent être résolus simultanément (d'où le modèle dynamique).

La formulation s'enrichit alors comme suit, mais dans les notations du présent exposé :

- Soit $X(t)$ le capital total investi au moment t ;
- Soit $\psi(t, X)$ le rendement brut par unité de temps au moment t, dû à l'investissement en capital X ; il est défini par :

  $$\psi(t,X) = \alpha X - \phi(X),$$

  où ϕ est une fonction différentiable telle que $\phi(0) = 0$ – mais qui n'est plus explicitée par la suite.

BHN ne sont d'ailleurs pas plus précis sur ce point, qui paraît peu compatible avec la définition de $\kappa(.)$ ci-dessous :

- $\kappa(t,X)$ est le rendement net, soit $\psi(t,X) - \alpha X$;
- $m(t)$ est l'emprunt au temps t, et est une variable de commande ;
- $r(t)$ est le taux d'intérêt sur ce $m(t)$;
- $x(t)$ désigne la valeur des fonds propres, à savoir $X(t) - m(t)$, et est la variable d'état ;
- $\mu(t)$ est l'investissement total par unité de temps au temps t et est la deuxième variable de commande.

  Cet investissement total est égal à la somme de l'accroissement de valeur des parts du capital, de l'amortissement et des intérêts sur emprunts :

  $$\mu(t) = \partial x + \alpha\, X(t) + r\, m(t)$$

- $d(t)$ sont les dividendes, non-négatifs, définis par :

  $$d(t) = \psi(t, X(t)) - \mu(t)$$

Des bornes peuvent être assignées aux variables, telles :

$$0 \leq m(t) \leq m^* + hx(t)$$

où h est une fraction du patrimoine $x(t)$.

Si le revenu brut est défini par :

$$\psi(t,X(t)) - (\alpha+r)\, m(t),$$

les dividendes sont censés en être au minimum une fraction définie par le paramètre constant $(1-\beta)$:

$$d(t) \geq (1-\beta)\, [\, \psi\, (t,X(t)) - (\alpha+r)\, m(t)\,]$$

Le modèle dynamique est alors :

(a) $\partial x + \alpha\, x = \mu(t) - (\alpha + r)\, m(t),$

(b) $x(0) = 0,$

(c) $0 \leq m(t) \leq m^* + hx(t),$

(d) $\mu(t) \leq b\, \{\, \phi((x(t) + m(t)) + \alpha\, [\, x(t) + m(t)\,]\, \} + (1\text{-}\beta)\, (\alpha + r)\, m(t)$

La condition (d) sur μ(t) est obtenue en combinant les définitions précédentes et ce sont les conditions (c) et (d), mises en égalités, qui se verront associer les multiplicateurs de Lagrange. Du point de vue des notations, on retrouve donc bien les variables des commandes μ et m, où μ dépend de m par un opérateur. De la sorte, la fonction de performance s'écrit bien en fonction du choix des valeurs de ces variables décisionnelles.

Ce critère de performance retenu par les auteurs est de maximiser la valeur actuelle du flux net de profits plus la valeur actuelle des capitaux propres à l'horizon H, ce qui en termes de minimisation s'écrit :

$$\min J[\mu, m] = -\int_0^H e^{-rH}[\varphi(x+m) + \alpha(x+m) - \mu(t)]dt - e^{-rH}x(H)$$

Cette formulation est étendue (par BHN) ensuite par l'inclusion d'un facteur de main-d'oeuvre, disons W(t), qui entre dans la formation de la valeur mais dont le coût (du travail bien sûr) doit être soustrait pour définir la fonction de revenu net.

Les trajectoires sont obtenues (par BHN) en faisant appel au principe du maximum de Pontryagin (le problème n'étant pas convexe) qui fournit les conditions nécessaires, mais pas suffisantes, d'optimisation. L'intérêt du modèle est de faire correspondre des trajectoires à des politiques, lesquelles s'expriment par exemple comme "main-d'oeuvre constante-max investissement", ou "rapport capital travail constant-investissement maximal".

Les auteurs obtiennent aussi des assertions telles que :

> « Cette trajectoire est possible si la productivité marginale du capital est au moins aussi élevée que le taux d'intérêt des fonds empruntés. »

Cette assertion n'est pas étrange pour des gestionnaires scolarisés et de haute compétence, puisqu'elle exprime une relation fondamentale de la théorie microéconomique ou "théorie de la firme". Un espoir de la systémique en gestion est donc rencontré, formulé comme suit dans cet exposé :

> Il est remarquable que cette "loi" fondamentale de la théorie microéconomique apparaisse comme une implication d'une formulation en modèle de contrôle optimal.

6.4.3 Les autres modèles de l'ouvrage de BHN

Les développements suivants de BHN font visiter les salons de la finance, dont celui de la page 130 montre un adorable petit modèle discret de gestion de portefeuille datant de la deuxième moitié du XX^{e} siècle. Le modèle de gestion de forêts, quant à lui, a un air très sain en présentant les choix entre les politiques d'investissement dans l'exploitation de la forêt et les dépenses en contrôle de la pollution, cette dernière étant intelligemment formulée comme un flux dans la fonction d'utilité.

Mais il lèse les majestés de découvrir leur couronne, et le devoir de réserve impose de laisser l'accès ouvert à la publication citée de ces auteurs. Ce qui a été repris ici ne forme d'ailleurs que deux exemples publiés parmi les contributions appliquant explicitement la théorie "analytique" de la dynamique de systèmes et du contrôle à des problématiques "quantitatives" de gestion.

Si des qualités demandées de la part de la modélisation sont la pertinence, l'élégance, la généralité et la simplicité, cette voie du système de contrôle optimal est inégalable en élégance (c'est ce qu'on a fait de plus chic dans le métier) mais est cependant dominée par d'autres plus efficaces et praticables, donc aussi plus simples et pertinentes. Ainsi, on sait le succès de la recherche opérationnelle (pour tout le domaine de l'optimisation) mais aussi, très spécifiquement, le développement de la "System Dynamics" initiée par FORRESTER (op. cit.), et ensuite épanouie par G. COYLE (Management System Dynamics, Wiley, 1979), pour rendre accessible et faisable une recherche de meilleures politiques dans les problèmes de dynamique de gestion sous contrôle.

7 Le mythe du cyber-manager

Les exemples cités sont des illustrations effectives de formulations de systèmes symboliques sous contrôle en gestion. Ils s'adressent bien sûr à une problématique donnée (disons bornée) par le thème de la modélisation et par la liste des variables intervenantes. Mais, à l'instar d'une Parisienne du 16^{e} arrondissement, il faut prendre de la hauteur par rapport à ces petites considérations mesquines, d'argent, de portefeuille, de stocks et d'approvisionnement, comme on les apprend dans les écoles de commerce et autres officines de management. Cette Parisienne, si on peut la supporter, montera le niveau du discours jusqu'à celui d'un PDG, et verra sereinement ce qui s'étale sous ses yeux. À quoi rêve, là-haut, un PDG ?

Là-haut, tout en haut, sur le sommet,
Il y a toujours une certaine paix
Vieux proverbe chinois
(P.S. Il semble qu'il n'y ait pas plus de jeunes proverbes chinois
qu'il n'y a de petits chirurgiens français)

Comme une fleur qui rêve d'horticulture, un PDG d'entreprise rêve donc à ce qu'il est : un Programme Dynamique de Gestion. À quand l'écrit sur "l'onanisme en gestion" ? Et justement, il n'y a rien de tel que les mythes et la mythologie pour apprendre à se bien conduire : on a l'exemple des dieux.

Mais, si on peut forger comme VULCAIN, souffler un peu comme EOLE, tempêter comme NEPTUNE, tonner comme ZEUS, communiquer comme HERMÈS, cavaler comme le CENTAURE, filer avec la caisse comme MERCURE, dieu du commerce, qui a des ailes aux mains et aux pieds, briller comme le pédéraste APOLLON et de façon générale aller chercher une belle petite bonne femme sur terre en lui promettant l'Olympe (ce qui d'ailleurs y fut la source de beaucoup d'ennuis), on peut gérer comme quel dieu ?

Dans ce milieu quasi-divin, on ne voit que le Kybernetes, le "timonier", pour piloter les affaires de façon olympique. En voici donc un modèle particulièrement élaboré, fleuron de ce catalogue de systèmes, comprenant à la fois la métaphore (du pilote, du navire et autres discours du Maire de CHAMPIGNAC), une opérationalité qui réponde à la théorie des systèmes, et un sillage de rêves...

Il reste pourtant un malaise avec ce "pilotage" qui a tant de succès et qu'on a tant rebâché, revendu et soldé jusque dans les Souk-El-Fellah. Il est sans fair-play d'imposer au systémicien cette tarte analogique en gestion parce qu'elle a un aspect non-justifiable et incompatible avec la métaphore du pilote. En effet tout le milieu, le contexte, la situation, les événements qui l'entourent," dans quoi" et "à travers quoi" on pilote sont différents.

La gestion est à certains égards une science de l'intermédiaire (une "mésoscience", entre la théorie et les sciences et la téléonomie et le monde réel des EAH), ce qui n'a rien à voir avec la souche de cette analogie, le "bateau en mer", et rend donc ce truc de "pilotage" invalide. Mais comme un gestionnaire-Chef serait peut-être un jour acheteur de l'opérateur de pilotage G(t)m(t), qui a l'air d'un engin assez puissant pour conserver la maîtrise du processus, il faut lui montrer sur la Figure 11 cette composante G(t)m(t), à savoir l'opérateur de gouvernement appliqué au signal de commande m.

Dans le cadre de la théorie des systèmes appliquée à des ensembles physiques, par exemple la commande de processus de fabrication, de machines, le signal m(t) est en général peu de chose. C'est un signal assez élémentaire qui est transformé par G et qui est transféré vers le processus. Quand on dit qu'il est "peu de chose", cela veut dire qu'il utilise une faible énergie par rapport aux énergies mises en oeuvre dans les processus réels. L'opérateur "G" peut contenir un amplificateur de cette énergie ; d'ailleurs, on a montré qu'en tant que matrice, il contient déjà des facteurs de gain. On trouve donc ici une première fois cette acception de l'opérateur G de Gouvernement comme amplificateur.

Dans l'exposé sur « Le Domaine de la gestion » (du Tome Sud), on retrouve cet amplificateur avec une connotation de "Chef", mais on aura changé de ton. Issus des Enfers infestés par le peuple des Maths, traversant, sous le terrible regard du ténébreux Hadès, la rivière Styx qui sépare le Royaume des Morts de la République des Socialistes Wallons, sous les aboiements rageurs du grand chien Cerbère, les gestionnaires seront chassés honteusement du royaume des Sciences Matheuses qui leur cracheront dans le dos leurs ultimes formules incantatoires.

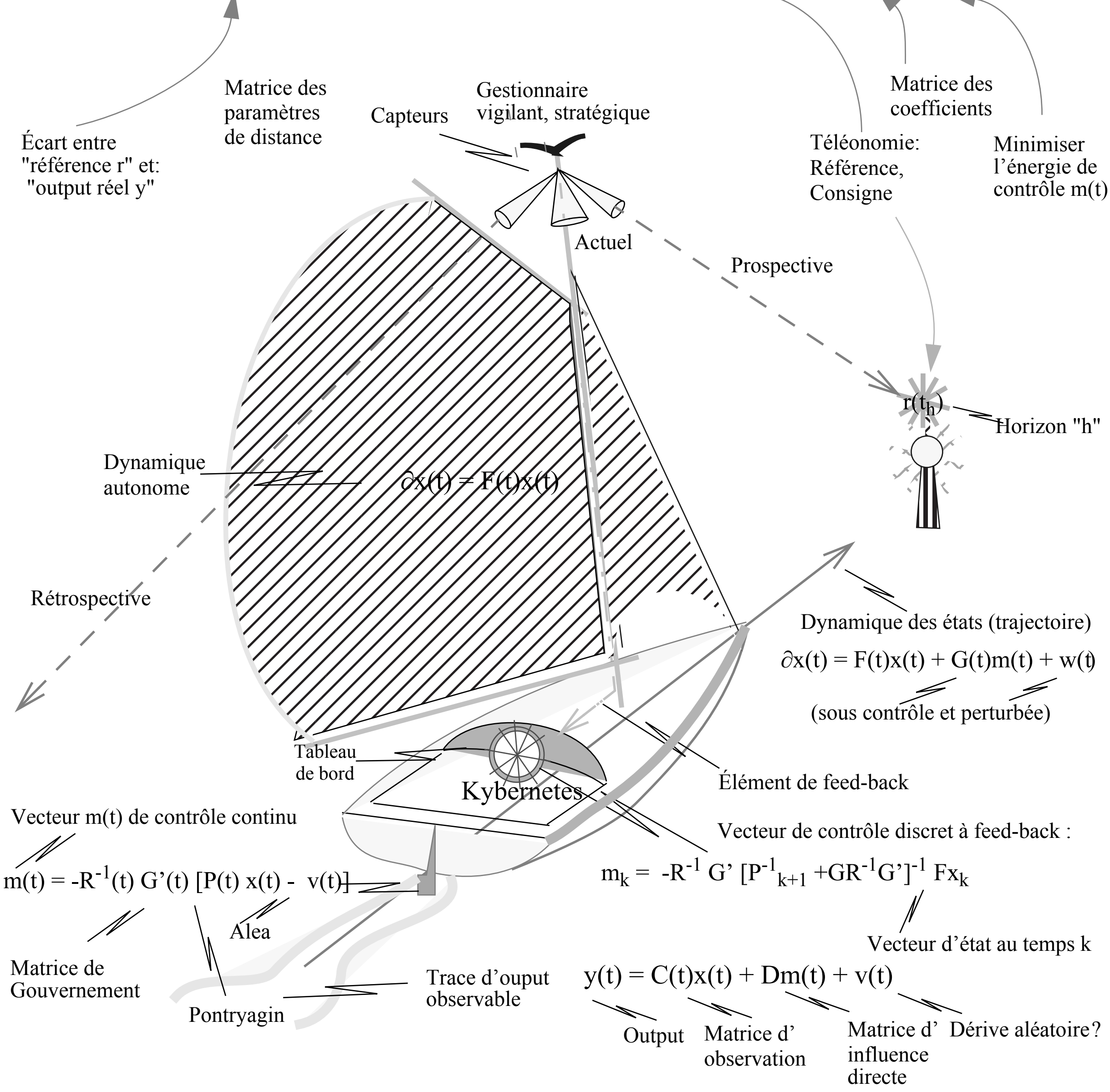
La barque du Pilote de Gestion, enfin stabilisée par les conditions de LYAPUNOV, atteindra alors le rivage lumineux des sciences de la vie et, comme Énée revenant de l'enfer de Troie fut accueilli sur un radieux rivage de Carthage par la radieuse Didon, les Bienheureux Lecteurs verront sur le tas de la grève s'ouvrir les bras de la Gestion. Mais on sera alors passé de l'autre côté de l'interface de la systémique et, ensablé dans les sciences mouvantes, on va vulgariser, et au pire mettre sous Windows, les résultats de la science au lieu de montrer, ce qui est la tâche des universités, comment ils ont été obtenus.

Figure 11. Le "pilotage" et le mythe du cyber-manager

Résumé métaphorique de la dynamique sous contrôle optimal

Critère de performance (exemple quadratique) :

$$J(y, \psi, m) = \frac{1}{2} \cdot [r(t_h) - y(t_t)]'S[r(t_h) - y(t)] + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_h} ([r(t) - y(t)]'Q(t)[r(t) - y(t)] + m(t)'R(t)m(t))dt$$



8 Les Voies et réseaux de la dynamique sous contrôle

8.1 Le baiser chinois

*F*ille de Bach... son quatorzième enfant... quelle dynastie !

Mais non, le mot feed-back est né plus tard, de père inconnu, d'un étranger, peut-être un immigré belge. Il n'a pas été inventé mais bien modélisé, les régulateurs et le contrôle étant déjà conçus et réalisés, soit par la Nature, soit par des esprits intrépides.

Les mots qui accompagnent la dynamique sous contrôle sont magiques, dignes d'X-Files et de fascinants Mangas : trajectoires, servo-mécanismes, cybermachins (à quand la cyberéthique ? Il y en aurait bien besoin...), commande optimale, optimisation, contraintes, contrôle intégral et différentiel, systèmes adaptatifs stochastiques. Dans les faits, on retrouve cependant beaucoup plus de ces ersatz de ressources humaines dans les jouets japonais qu'en gestion.

Aussi s'opposent deux voies de la dynamique sous contrôle dans le tournoi social organisé par le services des oeuvres de l'ASLJSIGASRH (Tout le monde a reconnu bien sûr l'Amicale de Sports et Loisirs "Joie et Santé" de l'Institut de Gériatrie d'Anguille-sous-Roche) :

- La première est qu'elle peut être instrument de pouvoir et même de servo-pouvoir, auquel elle fournit à la fois les moyens techniques et l'imagerie de la dominance et de la soumission à des forces inexorables parce qu'indifférentes, étant construite artificiellement pour cela ;
- La deuxième voie est celle de la robotique médicale, orthopédique. Elle se substitue partiellement à des déficiences de personnes qui ont eu moins de chance que d'autres, et ont besoin d'un morceau de soi-même refait pour eux, comme une main, une oreille ou un fauteuil très malin, et rendre par là le service que l'on espère d'un système, et qui figure dans sa définition : pouvoir faire, pour partie, quelque chose "à votre place".

Bientôt le Tome Sud, qui transgressera les frontières du réel entre les systèmes et la gestion, y importera en fraude des rites prohibés, les régulateurs seront au pif, les senseurs seront des comptables et les capteurs seront dans l'air du temps (quand ce sera leur tour d'y voir), les consignes seront mises à la gare, les opérateurs vendront des téléphones et les merveilleux servo-systèmes seront des multi-média, c'est-à-dire des multiplicateurs des mêmes âneries sous des formes nombreuses et variées.

En cet honneur, pour cette bonne cause, et pour la vraie mission de la cybernétique dont la nature a montré des exemples (mais a oublié quelques enfants), c'est ici que se situera un instant d'arrêt ; il est de bonne courtoisie de se recueillir un moment et respecter une minute de bruit devant le réseau des thèmes des différents exposés concernant la dynamique.

À Jules Renard

Ses compatriotes indifférents

Écrit (par soi-même) sur la statue en buste de Jules Renard

8.2 Le nauticiel (pilotage oblige...) de la dynamique

Figure 12. Nauticiel des exposés associés à la dynamique